Correction de l'AP du 12/12/14

(E) : $16x^2+25y^2-64x-336=0.$

A 1 a $M(x,3)\in\mathcal{C} \iff 16x^2+25.3^2-64x-336=0$

$\iff 16x^2-64x-111=0$

$\Delta = 11200$

donc $x=\dfrac{64+\sqrt{11200}}{32}$ ou $x=\dfrac{64-\sqrt{11200}}{32}$

$=\dfrac{64+40\sqrt{7}}{32}$ $\quad = 2-\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$

$\approx -1{,}31$

$=2+\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$

$\approx 5{,}3$

On a deux points d'ordonnée 3 : Un d'abscisse $2+\frac{5\sqrt{7}}{4}$ et l'autre d'abscisse $2-\frac{5\sqrt{7}}{4}$

b $M(5,y)\in\mathcal{C} \iff 16.5^2+25y^2-64.5-336=0$

$\iff 25y^2=256$

$\iff y^2=\dfrac{256}{25} \iff y=\dfrac{16}{5}$ ou $y=-\dfrac{16}{5}$.

On a deux points d'abscisse 5 d'ordonnées respectives $\frac{16}{5}$ et $-\frac{16}{5}$

c Dans la courbe représentative d'une fonction il ne peut y avoir deux points avec la même ordonnée donc $\mathcal{C}$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

2 $M(x;y)\in\mathcal{C} \iff 16x^2+25y^2-64x-336=0$

$\iff 25y^2=-16x^2+64x+336$

$\iff y^2=\dfrac{16}{25}(-x^2+4x+21)$

$\iff y^2=\dfrac{16}{25}h(x)$ avec $h(x)=-x^2+4x+21.$

3. On a alors

$M(x;y) \in \mathcal{C} \iff y^2 = \frac{16}{25} h(x)$

$\iff |y| = \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$ (en appliquant $\sqrt{\cdot}$)

$\iff y = -\frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$ ou $y = \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$.

4. $f : x \longmapsto \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$; $g : x \longmapsto -\frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe $(y'y)$.

Partie B :

1. On a $f(x) = \frac{4}{5}\sqrt{h(x)}$ avec $h(x) = -x^2+4x+21$

$x \in D_f \iff h(x) \geq 0$

Etudions $h(x) = -x^2-4x+21$

$\Delta = 16 + 4.21 = 100$ donc h admet deux racines : $x_1 = \frac{-4+10}{-2} = -3$

$x_2 = \frac{-4-10}{-2} = 7$

Donc

x		-3		7	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

alors on déduit $D = [-3;7]$

2. d'après le th de l'exercice 1, f est dérivable sur $]-3;7[$ et

$\forall x \in]-3,7[\quad f'(x) = \frac{4}{5} \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ avec $h'(x) = -2x+4$

ainsi $f'(x)$ est du signe de $-2x+4$ et donc on déduit le tableau de variations de f

x	-3		2		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

③ $\forall t \in [0,5] \quad f(2+t) = \frac{4}{5}\sqrt{h(2+t)}$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{-(2+t)^2+4(2+t)+21}$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{-t^2+25}$$

$$f(2-t) = \frac{4}{5}\sqrt{h(2-t)}$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{-(2-t)^2+4(2-t)+21} = \frac{4}{5}\sqrt{-t^2+25}$$

ainsi $f(2+t) = f(2-t) \quad \forall t \in [0,5]$

donc φ est symétrique par rapport à la droite $x=2$.

④ posons pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$.

$$= \frac{1}{h} \times \frac{4}{5}\sqrt{-(-3+h)^2+4(-3+h)+21}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{4}{5}\sqrt{-h^2+10h}$$

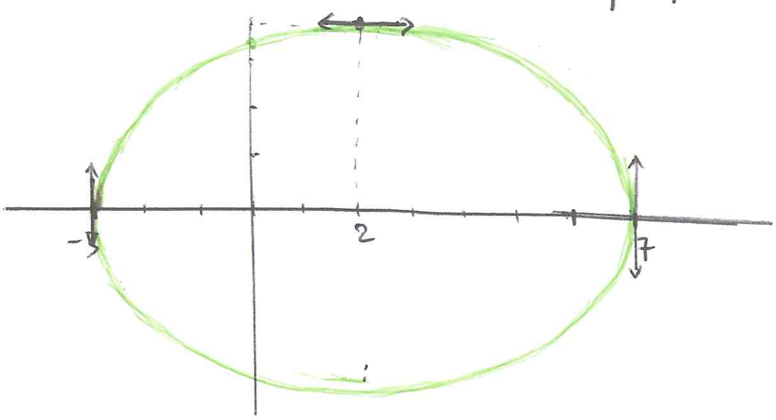
$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{h}\sqrt{10-h}$$

$$= \frac{4}{5\sqrt{h}}\sqrt{10-h}$$

on déduit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} t(h) = +\infty$

ainsi en -3, f non dérivable mais φ présente une tangente verticale.

⑤



Partie C.

① Soit $M \in \mathcal{C}$ alors $M(x, f(x))$

donc $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix} 5-x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ et donc $MF^2 = (5-x)^2 + \left(f(x)\right)^2$

$$= (x-5)^2 + \frac{16}{25}\left(-x^2+4x+21\right)$$

② $MF^2 = x^2 - 10x + 25 - \frac{16}{25}x^2 + \frac{64}{25}x + \frac{21.16}{25}$

$$= \frac{9x^2 - 186x + 961}{25}$$

$$= \left(\frac{3x-31}{5}\right)^2$$

ainsi $MF = \left|\frac{3x-31}{5}\right|$ c'est à dire $MF = \frac{31-3x}{5}$ car $x \in D$.

③ de même $MF' = \frac{19+3x}{5}$

alors $MF + MF' = \frac{1}{5}\left(31 - 3x + 19 + 3x\right) = 10 \quad \forall x \in D$.

Les points F et F' sont les foyers de l'ellipse et cela permet une construct° de l'ellipse avec une ficelle et 2 clous.