$1^{ère}$ S 3

Devoir N°2

I On remarque que $\mathcal{P}$ est une parabole donc h est un polynôme de degré 2.

de plus 0 et 4 racines de h donc

$h(x) = a x(x-4)$ avec $a \in \mathbb{R}$

On a aussi $h(2) = -4$

$$\Leftrightarrow 2a(-2) = -4$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

ainsi on a $h(x) = x(x-4)$

II ① $(1+3\sqrt{2})^2 = 1 + 6\sqrt{2} + 9 \times 2$

$$= 19 + 6\sqrt{2}$$

② $x^2 + (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$

On a $\Delta = (1-\sqrt{2})^2 - 4(-2\sqrt{2}-4)$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + 8\sqrt{2} + 16$$

$$= 3 + 6\sqrt{2} + 16$$

$$= 19 + 6\sqrt{2}$$

et donc d'après ① $\sqrt{\Delta} = (1+3\sqrt{2})$ (car $1+3\sqrt{2} > 0$)

③ Les solutions de (E) sont donc $x_1 = \dfrac{-(1-\sqrt{2}) + 1+3\sqrt{2}}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-(1-\sqrt{2}) - (1+3\sqrt{2})}{2}$

c'est-à-dire $x_1 = 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$.

III

① $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$* \quad P(1) = 2 - 1 - 2 + 1$
$= 0$ donc $\underline{1 \text{ est racine de } P.}$

② $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

ainsi par identifications des coefficients avec ceux de P on a

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = -2 \\ -c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

et donc $\underline{P(x) = (x-1)(2x^2+x-1)}$

③ Cherchons les racines de $2x^2+x-1$:

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ on a deux racines : $x = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{-1-3}{4} = -1$

et nous pouvons à l'aide du signe de la règle du trinôme dresser le tableau de signe de P :

x		-1		$1/2$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2+x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $P(x) > 0$

$\underline{\iff x \in \left]-1 ; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[}$

IV $(E_1) \iff x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

$$\iff \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X^2 - 3X - 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Resolution de $(*)$: $\Delta = 9 + 16 = 25$

on a deux racines : $X = \dfrac{3+5}{2} = 4$ ou $X = \dfrac{3-5}{2} = -1$

ainsi $(E_1) \iff \sqrt{x} = 4$ ou $\sqrt{x} = -1$ (impossible)

$\iff x = 16$

donc $\underline{S_1 = \{16\}}$

$(E_2) \iff \dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 3x$

$\iff \dfrac{2x+1}{x+2} - 3x \leqslant 0$

$\iff \dfrac{2x+1 - 3x(x+2)}{x+2} \leqslant 0$

$\iff \dfrac{-3x^2 - 4x + 1}{x+2} \leqslant 0$

Soit $N(x) = -3x^2 - 4x + 1$

on a $\Delta = 16 + 12 = 28 > 0$

ainsi N admet deux racines : $x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{28}}{-6} = \dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{-6}$

$= -\dfrac{1}{3}(2 + \sqrt{7})$

$\simeq -1,5$

$x_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{7} - 2) \simeq 0,22$

Nous pouvons maintenant dresser le tableau de signes pour (E_2) :

x		-2		x_1		x_2	
$N(x)$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{N(x)}{x+2}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$

ainsi $\quad S = \left]-2\,;\,-\frac{1}{3}(2+\sqrt{7})\right] \cup \left[\frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)\,;\,+\infty\right[$

$(E_3) \iff 4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$

$$\iff \begin{cases} X = x^2 \\ 4X^2 - 5X + 1 > 0 \quad (*) \end{cases}$$

Résolution de $(*)$:

$\Delta = 25 - 16 = 9$; on a deux racines : $X = \frac{5+3}{8} = 1$

ou

$X = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$

ainsi on a le tableau de signes.

X		$1/4$		1	
$4X^2-5X+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $4X^2 - 5X + 1 > 0 \iff X \in \left]-\infty; \frac{1}{4}\right[\cup]1; +$

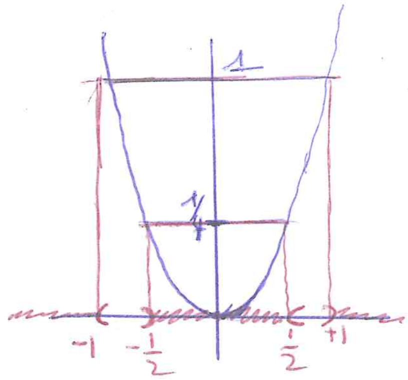
donc $(E_3) \iff x^2 \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{4}\right[\cup]1\,;+\infty[$

$\iff x^2 \leq \frac{1}{4}$ ou $x^2 > 1$

$\Longleftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\frac{1}{2}\right[$

ou

$x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]+1 ; +\infty\right[$



On a donc $\underline{S = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[}$