DS 4

19 oct 2014

I

① $D_m : y = mx + p$

et $A(-1, 0) \in D_m \implies 0 = m(-1) + p$

$\implies p = m$

donc $\boxed{D_m : y = mx + m}$

② $f(x) = x^2 - 3x + 1$

C_f est une parabole car f est un polynôme de degré 2.

le sommet est $S(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1$

$= \frac{1}{4}(9 - 2 \cdot 9 + 4)$

$= \frac{-5}{4}$

On déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-5/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4	-1
$f(x)$	1	-1	-1	1	5	5

③ⓐ Graphiquement on lit qu'il y a 2 cas limite

pour $m \approx -0{,}5$ ou $m \approx -10$ on a un seul point d'intersect°.

pour $m \in]-10 ; -0{,}5[$, il n'y a pas d'intersect°

sinon pour $m < -10$ ou pour $m > -0{,}5$ il y a deux points d'intersect°.

(3b) On cherche le nombre de solutions de

$f(x) = mx + m$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = mx + m$

$\Leftrightarrow x^2 - (3+m)x + 1 - m = 0$

$\Delta_m = (3+m)^2 - 4(1-m)$

$= m^2 + 6m + 9 - 4 + 4m$

$= m^2 + 10m + 5$

Δ_m est un polynôme de degré 2 en m.

On étudie son signe : $\Delta' = 100 - 20 = 80 > 0$

donc Δ_m a deux racines : $m_1 = \dfrac{-10 + \sqrt{80}}{2} = \dfrac{-10 + 4\sqrt{5}}{2}$

$= -5 + 2\sqrt{5} \simeq -0{,}53$

$m_2 = -5 - 2\sqrt{5} \simeq -9{,}48$

D'où le tableau de signes de Δ_m :

m		m_2		m_1	
Δ_m	+	0	−	0	+

Finalement pour • $m \in]-\infty ; -5-2\sqrt{5}[\cup]-5+2\sqrt{5} ; +\infty[$, on a 2 points d'intersect°

• $m \in \{-5-2\sqrt{5} ; -5+2\sqrt{5}\}$, on a 1 point d'intersect°

• $m \in]-5-2\sqrt{5} ; -5+2\sqrt{5}[$ aucun point d'intersect°.

(c) Oui c'est cohérent avec la conjecture

(II) (1) $\mathcal{D} : y = 2x - 3$; tableau de valeurs

x	0	3
$2x-3$	-3	3

($\mathcal{D}$ est une droite)

(2) $P(x) = f(x) - (2x-3)$

$$= x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

(a) On a $P(1) = 1 - 3 - 6 + 8$
$= 0$

donc 1 racine de P

$\Rightarrow$ il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

et donc par identification avec $P(x)$ on a $\begin{cases} a = 1 \\ b-a = -3 \\ c-b = -6 \\ -c = 8 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$ et finalement $\boxed{P(x) = (x-1)(x^2-2x-8)}$

(b) La position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de $d(x) = f(x) - (2x-3)$
$$= P(x)$$
$$= (x-1)(x^2-2x-8)$$

Cherchons les racines de $x^2 - 2x - 8$

$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$; on a deux racines :
$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$; $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

On déduit le tableau de signe de $P(x)$:

x		-2		1		4	
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2-2x-8	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

D'après le tableau : $\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{D}$ sur $[-2;1] \cup [4;+\infty[$
$\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;-2] \cup [1;4]$.

III ① $g(x) = -x^2+3x+2$.

taux d'accroissement en $a=1$:

$$t(h) = \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \quad \text{pour } h \neq 0$$

$$= \frac{-(1+h)^2+3(1+h)+2-4}{h}$$

$$= \frac{-1-2h-h^2+3+3h-2}{h}$$

$$= \frac{h-h^2}{h} = 1-h$$

donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 1$

Donc g est dérivable en $a=1$ et $g'(1)=1$

② On constate que la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1.
Le résultat semble donc correct.

IV ① f est une fonction affine par morceaux.
pour la représenter il suffit de tracer chaque droite et de garder les morceaux utiles.

② ⓐ $(E) \iff f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

graphiquement on a deux solutions : $x=-1$ ou $x=11$

ⓑ Par le calcul :

Cas 1 : si $x < -2$

$$(E) \iff -x+3 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$\iff \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = \frac{1}{3} \quad \text{à exclure (car } \geq -2\text{)}$$

Cas 2 : si $x \in [-2; \frac{1}{2}]$

$$(E) \iff -3x+1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$\iff \frac{7}{2}x = -\frac{7}{2}$$
$$\iff x = -1 \quad \text{acceptée.}$$

Cas 3 : si $x > \frac{1}{2}$

$$(E) \iff x-3 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2}x = \frac{11}{2}$$
$$\iff x = 11 \quad \text{acceptée (car } > \frac{1}{2}\text{)}$$

Finalement $\boxed{S = \{-1; 11\}}$.