DS6 - 1S3 - 24/11/2014

I $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Soit $t(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ le taux d'accroissement en 2 $(h \neq 0)$

$$= \frac{3(2+h)^2 - 2(2+h) + 1 - 9}{h}$$

$$= \frac{3h^2 + 10h}{h} = \frac{h(3h+10)}{h} = 3h + 10.$$

donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 10$

ainsi f dérivable en $x = 2$ et $f'(2) = 10$.

II ① On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$

f polynôme donc f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$

$$= -3(x^2 + 2x - 3)$$

Etudions le signe de $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

$\Delta = 4 + 12 = 16$ donc P admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

ainsi $f'(x)$ est du signe de $-P(x)$ d'où le tableau :

x		-3		1	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On déduit alors le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	27	$\nearrow$	32	$\searrow$	

$f(-3) = +27 - 27 - 27 + 27 = 0$

$f(1) = -1 - 3 + 9 + 27 = 32$

(2) (a) Voir figure

(b) la petite base du trapèze vaut $MN = 2x$

la grande base vaut $AB = 6$

la hauteur vaut $h = 9 - x^2$

donc l'aire vaut $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}(9-x^2)\times(2x+6)$

$= \frac{1}{2}(-2x^3 - 6x^2 + 18x - 54)$

$= -x^3 - 3x^2 + 9x - 27$

$= f(x)$

(c) l'aire est maximale lorsque f est maximale.

D'après le tableau de variat° de f sur $[0;3]$, f présente un maximum local en $x = 1$.

l'aire vaut alors $\mathcal{A}(1) = f(1) = 32$ u.a.

III 1 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+x+1)(x-1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$

$= x^3 - 1$

ainsi l'égalité est démontrée

b) f fonct° rationnelle donc f dérivable sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$

et $\forall x > 0$ $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$

$= \dfrac{2x^3-2}{x^2} = 2\,\dfrac{(x^3-1)}{x^2}$

c) $\forall x > 0$; $\dfrac{2}{x^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de

$N(x) = x^3 - 1$

$= (x-1)(x^2+x+1)$

Soit $P(x) = x^2 + x + 1$

P polynôme de degré 2 et $\Delta = -3 < 0$

donc $\forall x$; $P(x) > 0$ (car le coeff de x^2 est $1 > 0$)

ainsi N est du signe de $(x-1)$

finalement $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ d'où le tableau de variat° de f :

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$

d) Ainsi en 1 f présente un minimum et $\forall x > 0$, $f(x) \geq f(1)$

c'est-à-dire

$\forall x > 0$; $x^2 + \dfrac{1}{x} \geq 3$.

IV ① D'après la figure, on dirait bien qu'il y a une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par $A(0,2)$.

② ⓐ D'après le cours $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ici $f(a) = \sqrt{a}$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

ainsi $T_a : \quad y = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + f(a)$

ⓑ $A(2;0) \in T_a \iff 2 = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(-a) + \sqrt{a}$

$$\iff 2 = -\frac{a}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a}$$

$$\iff 2 = -\frac{\sqrt{a}}{2} + \sqrt{a}$$

$$\iff \frac{\sqrt{a}}{2} = 2 \iff \sqrt{a} = 4$$

$$\iff a = 16.$$

Ainsi pour $a = 16$; T_a passe par $A(0,2)$
c'est-à-dire au point d'abscisse 16 la tangente passe par le point $A(0;2)$.

On a $T_{16} : \quad y = \dfrac{1}{2\sqrt{16}}(x-16) + \sqrt{16}$

$$\iff y = \frac{1}{8}(x-16) + 4$$

$$\iff \boxed{y = \frac{1}{8}x + 2}$$

La conjecture est vérifiée: il y a une tangente qui passe par A

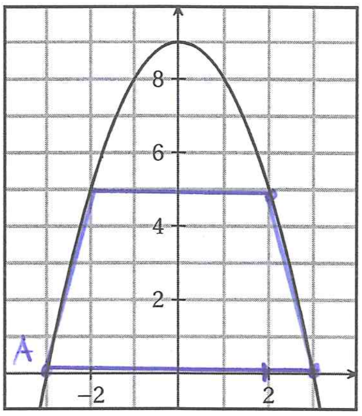
Devoir Mathématiques N^o 6 (1h)

0 Nom et prénom : Master

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Montrer à l'aide du taux d'accroissement que f est dérivable en $x = 2$ et déterminer $f'(2)$.

2 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).
2. Soient $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = 9 - x^2$ dont une représentation est donnée ci-contre.
   On note $A(-3;0)$,$B(3;0)$ et pour $x \in]0,3[$ on note M et N les points de $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$. On considère le trapèze $ABMN$.
   a) Complétex la figure avec $x = 2$.
   b) *Rappel : Aire du trapèze* $= \dfrac{\textit{(petite base + grande base)} \times \textit{hauteur}}{2}$.
   Déterminer l'expression de l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze $ABMN$ en fonction de x.
   c) Déduire des questions précédentes la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale. Quelle est alors cette aire (en cm^2).

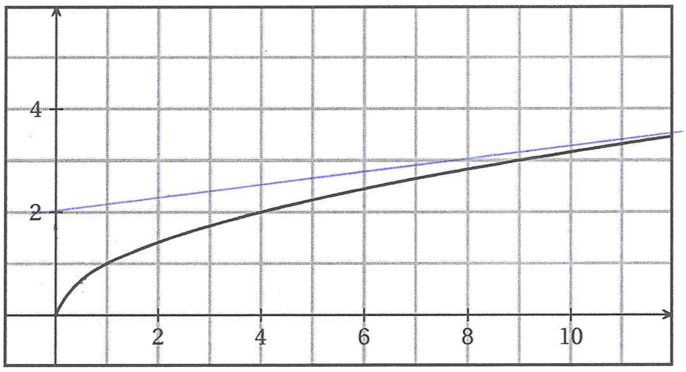


3 Le but de cet exercice est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $x^2 + \dfrac{2}{x} \geq 3$.

Soit $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ définie pour $x > 0$.

1. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{2(x^3 - 1)}{x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).
4. Montrer alors l'inégalité demandée.

4 Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous. On note $A\cancel{(2;0)}$. $(0;2)$



1. Faite une conjecture sur l'existence ou non d'une tangente à $\mathscr{C}$ passant par A.
2. Vérification de la conjecture par calcul.
   a) Soit $a > 0$. Ecrire l'équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   b) Résoudre le problème et conclure par rapport à votre conjecture. Vous donnerez le cas échéant l'équation de la tangente.