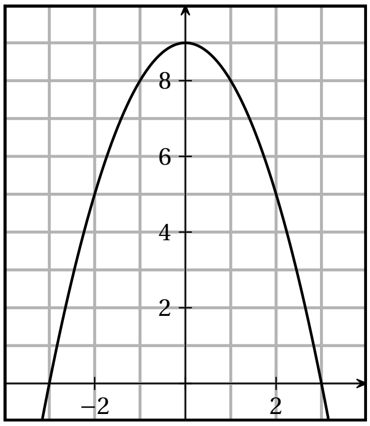
Devoir Mathématiques N^o 6 (1h)

0 Nom et prénom :

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Montrer à l'aide du taux d'accroissement que f est dérivable en $x = 2$ et déterminer $f'(2)$.

2 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).
2. Soient $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = 9 - x^2$ dont une représentation est donnée ci-contre.
   On note $A(-3; 0)$,$B(3; 0)$ et pour $x \in]0,3[$ on note M et N les points de $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$. On considère le trapèze $ABMN$.
   a) Complétez la figure avec $x = 2$.
   b) *Rappel : Aire du trapèze* $= \dfrac{\textit{(petite base + grande base)} \times \textit{hauteur}}{2}$.
   Déterminer l'expression de l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze $ABMN$ en fonction de x.
   c) Déduire des questions précédentes la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale. Quelle est alors cette aire (en cm^2).

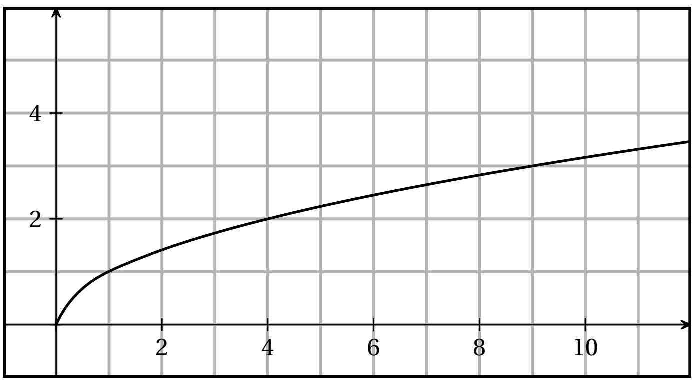


3 Le but de cet exercice est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$ on a $x^2 + \dfrac{2}{x} \geq 3$.

Soit $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ définie pour $x > 0$.

1. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{2(x^3 - 1)}{x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).
4. Montrer alors l'inégalité demandée.

4 Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous. On note $A(2; 0)$.



1. Faite une conjecture sur l'existence ou non d'une tangente à $\mathscr{C}$ passant par A.
2. Vérification de la conjecture par calcul.
   a) Soit $a > 0$. Ecrire l'équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   b) Résoudre le problème et conclure par rapport à votre conjecture. Vous donnerez le cas échéant l'équation de la tangente.