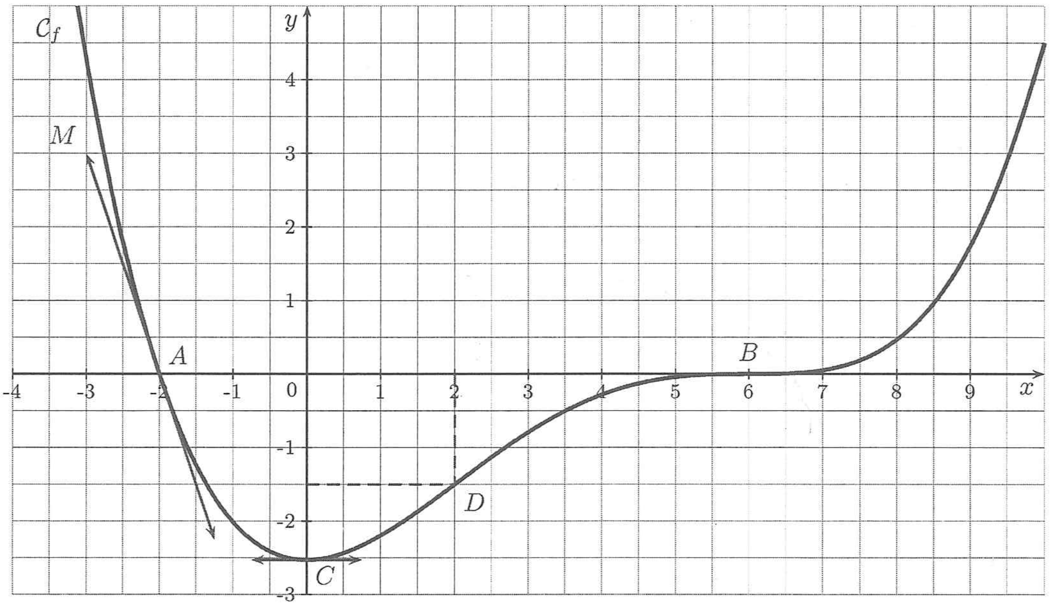
Devoir Mathématiques N^o 7 (1h)

0 Nom et prénom :

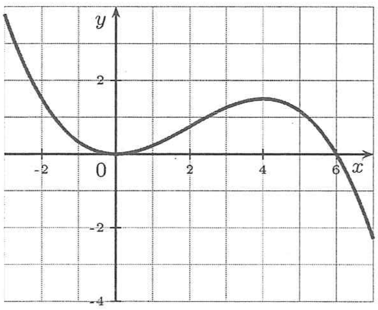
1 **3 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f.
La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $A(-2;0)$ et lui est tangente au point B d'abscisse 6.
La tangente à la courbe au point A passe par le point $M\,(-3;3)$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 0.

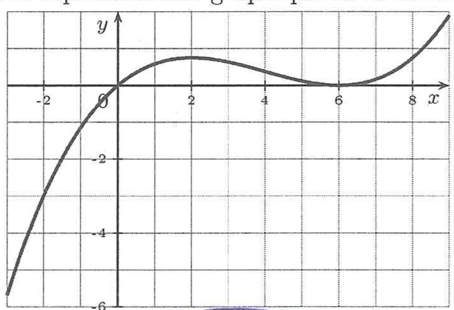


À partir du graphique et des données de l'énoncé, compléter sur la copie :

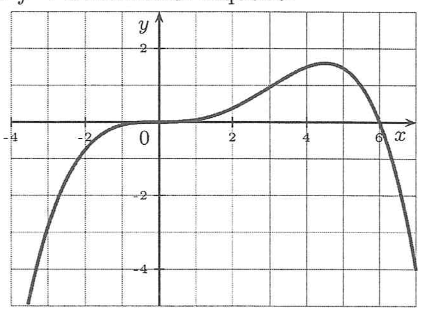
1. $f'(0)$ vaut .0
2. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont 0 et 6
3. $f'(-2)$ vaut -3
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$

Car $f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$; $f \searrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

2 **2 points**

Déterminez la dérivée de la fonction :

$$f_1(x) = 3\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \text{ sur } D = \mathbb{R}$$

On a $f_1'(x) = 3\dfrac{(x^2+1)(3x^2-1) - 2x(x^3-x)}{(x^2+1)^2}$

$= 3\dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

DS n°7

I ; II voir feuille.

III $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$.

f' polynôme de degré 2

$\Delta = 16 + 36 = 52 > 0$

donc f' admet 2 racines : $x_1 = \dfrac{4+\sqrt{52}}{6} = \dfrac{2+\sqrt{13}}{3} \approx 1{,}87$

$x_2 = \dfrac{2-\sqrt{13}}{3} \approx -0{,}54$

On déduit le tableau de signe de $f'(x)$:

x		$\frac{2-\sqrt{13}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{13}}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

② On déduit alors le tableau de variat° de f,

x		x_2		x_1	
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$

avec $f(x_1) \approx 0{,}88$

$f(x_2) \approx -6{,}06$

③ ⓐ Par th l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow y = -3x + 0$ c'est-à-dire $\boxed{T : y = -3x.}$

b) Soit Δ_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

par Th : $\Delta_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$\Delta_a \mathbin{/\!/} T \iff \Delta_a$ et T ont le même coefficient directeur

$\iff f'(a) = 3$

$\iff 3a^2 - 4a - 3 = 3$

$\iff 3a^2 - 4a = 0 \iff a(3a-4) = 0$

$\iff a = 0$ ou $\boxed{a = \frac{4}{3}}$.

Il y a donc deux tangentes parallèles à T :

Δ_0 qui correspond à T puis

$\Delta_{\frac{4}{3}} : y = f'(4/3)(x - 4/3) + f(4/3)$

$f(4/3) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3\cdot\frac{4}{3}$

$= \frac{64-96}{27} - 4 = -\frac{[illegible]}{27}$ et $f'(4/3) = -3$

donc $\Delta_{4/3} : y = -3(x - 4/3) - \frac{32}{27} \iff \boxed{y = -3x - \frac{32}{27}}$

Le point de contact est donc $A\left(\frac{4}{3} ; f(4/3)\right)$ c'est-à-dire $\boxed{A\left(\frac{4}{3} ; -\frac{140}{27}\right)}$

IV ① $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$.

ⓐ f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car fraction rationnelle et

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 4x$$

$$= \frac{-4+4x^3}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2}$$

D'autre par $\forall x \neq 0$; $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1$

$$= x^3-1$$

et donc $\boxed{f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}}$ $\forall x \neq 0$.

ⓑ Soit $P(x) = x^2+x+1$; $\Delta = -3 < 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

d'autre part : $4>0$ et $x^2>0$ ainsi f' est du signe de $x-1$.

On déduit alors le tableau de signe de $f'(x)$ puis son tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

② ⓐ L'aire totale est l'aire des 2 carrés de coté x et des 4 rectangles de côté x et h.

On obtient

$$S = 2x^2 + 4xh.$$

ⓑ le volume vaut base × hauteur.

ici $V = x^2 \times h$.

ⓒ On a $V = 1 \iff x^2 h = 1 \iff h = \frac{1}{x^2}$.

ⓓ On a $S = 2x^2 + 4xh$

$$= 2x^2 + 4x \cdot \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

$$= f(x). \quad \forall x > 0.$$

ⓔ La surface est minimale lorsque f atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire pour $x = 1$.

On a alors $h = 1$ et donc le réservoir est cubique.