DS 9 - 1ère S - 19 déc 2014

I ① On conjecture que (u_n) est décroissante et que $\lim_{n \to \infty} u_n = -\infty$.

② $\forall n \quad u_{n+1} = -0{,}2u_n^2 + u_n$

donc $\quad u_{n+1} - u_n = -0{,}2\, u_n^2 \leq 0 \quad$ car $\forall n \; u_n^2 \geq 0$

donc $\boxed{(u_n) \text{ décroissante}}$.

II (u_n) est arithmétique donc $u_n = u_0 + nr$

et en particulier $\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p + (m-p)r$.

avec $n = 40$ et $p = 17$ on a $u_{40} = u_{17} + 23r$

$$\iff 70 = 24 + 23r$$

$$\iff 46 = 23r$$

$$\iff \boxed{r = 2}.$$

on a alors $u_{40} = u_0 + 40r$

$\iff \quad 70 = u_0 + 40 \times 2 \quad$ donc $\boxed{u_0 = -10}$.

finalement (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -10$.

III ① $\forall n \quad u_n = (-2)^{+n}$

$u_n = 1 \times (-2)^n$ est une suite géométrique de raison (-2) et premier terme $u_0 = 1$

② $\forall n, \quad u_n = 2^{2n+4}$

$$= 2^{2n} \times 2^4$$

$$= (2^2)^n \times 2^4 \quad \text{donc} \quad u_n = 16 . 4^n$$

donc (u_n) est arithmétique de raison 4 et $u_0 = 16$

③ $u_n = \dfrac{5n+3}{2}$; $n \in \mathbb{N}$

$= \dfrac{3}{2} + n \cdot \dfrac{5}{2}$ donc (u_n) arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et $u_0 = \frac{3}{2}$

④ $u_n = n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_0 = 0$
$u_1 = 1$
$u_2 = 4$

alors $u_1 - u_0 = 0$
$u_2 - u_1 = 3$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

et $q \times u_0 = 0$ $\forall q \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ (u_n) n'est pas géométrique

IV $r_1 = 1$; $r_2 = 3$; $r_3 = 5$, ...

① On rajoute 2 canettes à chaque rangée

ainsi $r_{n+1} = r_n + 2$ et $r_1 = 1$

donc (r_n) arithmétique de raison 2 avec $r_1 = 1$

② par th $r_n = r_1 + (n-1) \times 2$

c'est-à-dire $r_n = 1 + 2(n-1)$

$$\boxed{r_n = 2n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

③ Il faut calculer $S = r_1 + r_2 + \cdots + r_{25}$

par th : $S = \dfrac{r_1 + r_{25}}{2} \times 25$

$= \dfrac{1 + 49}{2} \times 25 = 25^2 = 625$

Il faut 625 canettes pour faire l'empilement

V 3 réels en progression arithmétiques s'écrivent

$x = a - r$
$y = a$
$z = a + r$ où r est la raison.

donc $x + y + z = 120 \iff 3a = 120 \iff a = 40$

et $xyz = 59160 \iff (a-r)a(a+r) = 59160$
$\iff (40-r)(40+r)40 = 59160$
$\iff 1600 - r^2 = 1479$
$\iff r^2 = 121$
$\iff r = 11$ ou $r = -11$

Les trois nombres cherchés sont donc

$\boxed{x = 29 ; y = 40 ; z = 51}$.

VI ① l'algorithme affiche : $2 ; 3 ; 8 ; 63$

② la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$ fait l'affaire.

VII $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \dfrac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} = \underline{\frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$. (par th).

VIII $\forall n ; \quad u_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+4}$

- $u_n > 0$ comme quotient de 2 réels positifs.
- $\dfrac{n^2+5}{n^2+4} = \dfrac{n^2+4}{n^2+4} + \dfrac{1}{n^2+4} = 1 + \dfrac{1}{n^2+4}$ et $n^2 + 4 \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2+4} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant 1$

donc $u_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+4} \leqslant 2$ ainsi (u_n) minorée par 0 et majorée par 2

donc $\boxed{(u_n) \text{ bornée}}$.