Devoir de maths n° 10.

I Partie A

Les résultats affichés par l'algorithme sont : $\frac{3}{2}$; $\frac{27}{8}$

En fait on n'affiche pas -6 car affichaU vient après le calcul.

Partie B :

① Les construct° graphique semble montrer que (U_n) est croissante et (U_n) converge vers 4.

② ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

$$= \frac{1}{4} u_n + 3 - 4$$

$$= \frac{1}{4} u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et premier terme $v_1 = u_1 - 4$
$= -6 - 4 = -10.$

ⓑ Par th on déduit $v_n = v_1 q^{n-1}$; c'est-à-dire $v_n = -10 \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$

d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = u_n - 4$ donc $u_n = v_n + 4$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 4 - \frac{10}{4^{n-1}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ⓒ $\frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

on déduit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

II

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2} \end{cases}$; $v_n = u_n^2$; $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = u_{n+1}^2$

$$= \left(\sqrt{3+u_n^2}\right)^2 = 3 + u_n^2 = v_n + 3$$

ainsi (v_n) est arithmétique de raison 3 et premier terme $v_0 = u_0^2 = 0$.

On déduit alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = v_0 + nr$ c.à.d $v_n = 3n$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n| = \sqrt{v_n}$ c'est-à-dire $\boxed{u_n = \sqrt{3n}}$. car $u_n > 0$ d'après son expression

III $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$

① $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n = u_n - v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{d_n}{3}$$

donc (d_n) géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et 1er terme $d_0 = u_0 - v_0 = -2$.

ainsi par th : $\forall n \in \mathbb{N}$; $d_n = -2 . \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

② $s_n = u_n + v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$$= \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{3u_n + 3v_n}{3} = u_n + v_n = s_n.$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$; $s_{n+1} = s_n$ et donc (s_n) est une suite stationnaire (constante)

c. à. d $\forall n$ $s_n = s_0 = 2$.

③ finalement on déduit des questions précédentes qu'on a le système suivant :

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n - v_n = -2 . \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ u_n + v_n = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2u_n = 2 - 2 . \left(\frac{1}{3}\right)^n & (L_1 + L_2) \\ 2v_n = 2 + 2 . \left(\frac{1}{3}\right)^n & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } v_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Devoir Mathématiques N^o 10 (1h)

0 Nom et prénom : LUCAS Nerea

1 **Partie A**

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul N. **Traitement** Affecter à U la valeur -6 Pour k allant de 1 à N (inclus) Affecter à U la valeur $\frac{1}{4}U + 3$ Afficher U Fin pour

$U \leftarrow -6$

$\frac{1}{4}(-6)+3$

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 2$? (justifier sommairement)

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = -6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Sur le graphique ci-joint, représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. En déduire une conjecture sur la monotonie de (u_n) et sur son éventuelle limite.
2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par $v_n = u_n - 4$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire celle de (u_n). pour tout entier naturel n.
   c) En déduire la limite de (u_n).