-- février 2015

DS 11 - Probabilités.

I 1) On compte 18 cases bleues, 6 jaunes ; 4 vertes ; 2 rouges.

Il y a 30 cases au total et chaque case a la même probabilité d'être touchée : $\frac{1}{30}$.

a) X la v.a représentant le gain du joueur.

On a $X(\Omega) = \{-a ; 0 ; 5 ; 8\}$.

$(X=-a)$: "le joueur perd" c. à; d on a une case blanche.

il y a 18 cases blanches donc $P(X=-a) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

de même : $P(X=8) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P(X=5) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$P(X=0) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

ainsi la loi de probabilité de X est donnée par le tableau

$X=x_i$	$-a$	0	5	8
$P(X=x_i)$	$3/5$	$1/5$	$2/15$	$1/15$

b) Par th $E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

c. à. d $E(X) = -a \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \cdot 5 + 8 \cdot \frac{1}{15}$

$= \frac{1}{15}(-9a + 10 + 8)$

$= \boxed{\frac{1}{15}(18 - 9a)}$

Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0$

$\Leftrightarrow 18 - 9a = 0 \Leftrightarrow a = 2$ €

② ⓐ "le joueur gagne" est l'événement $X>0$.

$$p = p(X>0) = P(X=5) + P(X=8)$$
$$= \frac{3}{15} = \boxed{\frac{1}{5}}. \qquad \text{et} \qquad p' = 1-p = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

ⓑ B : "le joueur gagne au moins une fois"

$\bar{B}$: "le joueur perd à chaque partie"

donc $P(\bar{B}) = \left(\frac{4}{5}\right)^5$

On a donc $P(B) = 1 - P(\bar{B})$
$$= \boxed{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} \simeq 0,6723$$

Ⅱ ① l'univers Ω est l'ensemble des couples (a,b) avec $a \neq b$; $a \in \{1,\dots,5\}$; $b \in \{1,\dots,5\}$.

$\Omega = \{(1;2);(1;3);(1;4),\dots\}$

On a $\#\Omega = 5\times 4$ (5 choix pour la boule 1 et 4 pour la 2ème).

② A : "$a+b=5$"

$A = \{(1;4);(2;3);(3;2);(4;1)\}$

Nous sommes en situation d'équiprobabilité donc $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
$$= \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

B: "$|a-b| = 1$"

Donc $B = \{(2;1);(1;2);(2;3);(3;2);(3;4);(4;3);(4;5);(5;4)\}$

donc $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5}}$

(c) D'après ce qui précède : $A \cap B = \{(2,3);(3;2)\}$

donc $P(A\cap B) = \frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega} = \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{10}}$.

(d) par th $P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A\cap B)$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$.

III Partie A.

(1) On prend un coureur au hasard.
L'univers Ω est l'ensemble des coureurs ; $\#\Omega = 50$.
5 coureurs sont pris pour le test.
étant en situation d'équiprobabilité, la proba d'être choisi pour le test est donc $p = \frac{5}{\#\Omega} = \boxed{0{,}1}$.

(2)(a) • On a une expérience de Bernoulli qui consiste à choisir un coureur et dont l'issue succès est "il est controlé" avec pour probabilité $p=0{,}1$

• On répète 10 fois de manière indépendante cette épreuve (10 courses)

Par th la variable X comptant le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 10 ; 0,1. $\boxed{X \sim B(10;0{,}1)}$

(b) $P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^5 \approx 0{,}0015$

$P(X=0) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}9^{10} \approx 0{,}3487$

$P(X\geq 1)$ est la probabilité de "il a été controlé au moins 1 fois"

donc $P(X\geq 1) = 1 - P(X<1)$
$= 1 - P(X=0)$
$\approx 0{,}6513$.

Partie B : (1) Il s'agit de prendre 5 personnes parmi les 50. Le nombre de possibilités est $N = \binom{50}{5} = 2.118\,760$

(2) (a) L_1 et L_3 ne peuvent être issues de l'algo car un élément se répète

(b) L'algorithme permet de choisir un groupe de 5 coureurs au hasard. La liste doit être composée de 5 entiers différents 2 à 2 pris entre 1 et 50.