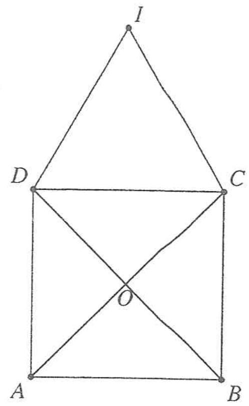
Devoir Mathématiques N^o 12 (1h)

1 2 points



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et DCI est un triangle équilatéral.
Compléter en donnant la mesure des angles orientés suivants :

1. $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CI}) =$ $-\pi/3 + 2k\pi$
2. $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{AD}) =$ $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
3. $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{DC}) =$ $\pi + 2k\pi$
4. $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AO}) =$ $-\pi/4 + 2k\pi$
5. $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DI}) =$ $-\pi/6 + 2k\pi$

2 2 points

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

$$2\sin^2 t - 3\sin t + 1 = 0$$

3 5 points

Résoudre les équations et inéquations proposées sur l'intervalle indiqué.

(E_1) : $\cos x > -\frac{1}{2}$ sur $[0;2\pi]$.

(E_2) : $\sin x \cos x = 2$ sur $\mathbb{R}$.

(E_3) : $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$ sur $[-\pi;\pi]$.

4 3 points

Soit $A(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sin(x + \frac{\pi}{3})$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Simplifier l'expression $A(x)$.
2. Que pouvez-vous en déduire ?

5 3 points

Simplifier.

1. $A(x) = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
2. $B(x) = (\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2$
3. $C = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{10\pi}{11}$

6 2 points

Résoudre dans $[0;2\pi]$.

$$\sin(2x) - \sin x = 0$$

7 3 points

On donne $\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$.

1. Calculer $\cos x$.
2. Puis à l'aide des formules de duplication, calculer $\sin 2x$.
3. En déduire la valeur exacte de $2x$, puis celle de x.

VII $\sin x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $x \in [0, \pi/4]$

1) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

$= \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ainsi $\cos x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

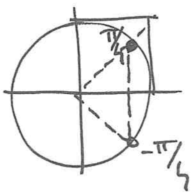
mais $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Longrightarrow \cos x > 0$ donc $\boxed{\cos x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

2) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$= 2 \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

3)



donc $2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; ou $2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

or $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Longrightarrow 2x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $2x = \frac{\pi}{4}$

$\Longrightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{8}}$

DS 12 - Trigo

II $\quad 2\sin^2 t - 3\sin t + 1 = 0 \quad (E)$

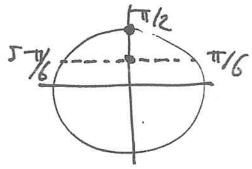
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin t \\ 2X^2 - 3X + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Résolution de $(*)$: $\Delta = 1$ donc $(*)$ admet 2 racines : $X = \frac{3+1}{4} = 1$

ou $X = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

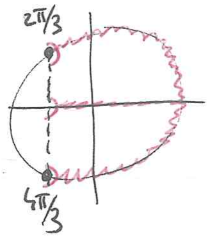
Donc $(E) \Leftrightarrow \sin t = 1$ ou $\sin t = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t \in \{\pi/6 ; \pi/2 ; 5\pi/6\}$



$$\boxed{S = \{\pi/6 , \pi/2 , 5\pi/6\}}$$

III $\quad E_1 : \cos x > -\frac{1}{2}$



$$\boxed{S = \left]\frac{4\pi}{3} ; 2\pi\right] \cup \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[}$$

$E_2 : \sin x \cos x = 2$

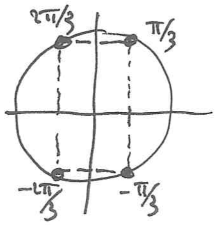
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$

donc $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow |\sin x \cos x| \leq 1$

ainsi $\sin x \cos x = 2$ est impossible ! $\quad \boxed{S = \emptyset}$

$E_3 : \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (par passage à la racine)

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



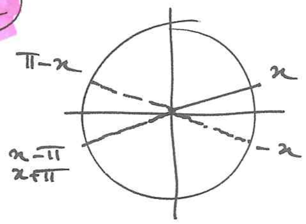
$$\boxed{S = \{\pi/3 ; 2\pi/3 ; -\pi/3 ; -2\pi/3\}}$$

IV

$$A(x) = \cos(x - \pi/6) - \sin(x + \pi/3)$$
$$= \cos x \cos \pi/6 + \sin x \sin \pi/6 - \sin x \cos \pi/3 - \cos x \sin \pi/3$$
$$= \cos x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \frac{1}{2} - \cos x \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $A(x) = 0$ c'est-à-dire $\cos(x - \pi/6) = \sin(x + \pi/3)$

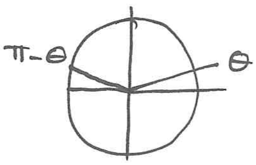
V



$$A(x) = \cos(x - \pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$$
$$= -\cos x - \sin x - \cos x + \sin x$$
$$= -2\cos x$$

$$B(x) = (\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2$$
$$= \cos^2 x + 4\cos x \sin x + 4\sin^2 x + 4\cos^2 x - 4\cos x \sin x + \sin^2 x$$
$$= 5(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$= 5.$$

$$C = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{10\pi}{11}$$

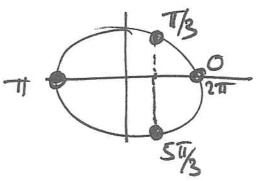


$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ainsi $\cos\frac{10\pi}{11} = -\cos\frac{\pi}{11}$; $\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$

donc $C = 0$.

VI

$$\sin(2x) - \sin x = 0 \iff 2\sin x \cos x - \sin x = 0$$
$$\iff \sin x(2\cos x - 1) = 0$$
$$\iff \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$



$$S = \left\{0 ; \frac{\pi}{3} ; \pi ; \frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right\}$$