DS 13

13 avril 2015

I

$\mathcal{D}_m : mx + (2m-1)y + 4 = 0$

① Nous avons l'équation cartésienne d'une droite si les coefficients de x et y ne sont pas nuls en même temps.

Coeff de x : m ; si $m \neq 0$; c'est une droite.

si $m = 0$ alors $2m-1 = -1$ est le coeff de y

$-1 \neq 0$ donc c'est aussi une droite.

② • Les droites parallèles à (Ox) s'écrivent $y =$ constante.

donc $D_m \mathbin{/\mkern-6mu/} (Ox) \iff m = 0$

• Les droites parallèles à (Oy) s'écrivent $x =$ constante

donc $D_m \mathbin{/\mkern-6mu/} (Oy) \iff 2m-1 = 0 \iff m = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $D_0 \mathbin{/\mkern-6mu/} (Ox)$; $D_{1/2} \mathbin{/\mkern-6mu/} (Oy)$

③ $D_0 : -y + 4 = 0 \iff D_0 : y = +4$

$D_1 : x + y + 4 = 0$

$$M(x;y) \in D_0 \cap D_1 \iff \begin{cases} y = +4 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = +4 \\ x = -8 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{M(8,+4)}$$

④ Vérifions que $\forall m \in \mathbb{R}$; $M(-8;+4) \in D_m$

En effet $\forall m \in \mathbb{R}$; $m x_M + (2m-1) y_M + 4 = -8m + 8m - 4 + 4$

$$= 0$$

donc $\boxed{M \in D_m \quad \forall m \in \mathbb{R}}$.

II ① D'après le cours, nous savons que

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{cases}$$ (formule de la somme).

on déduit que $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ (par somme)

et $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

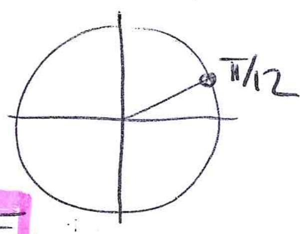
En appliquant avec $x = \frac{\pi}{12}$, on a $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

On déduit $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

mais $\cos\frac{\pi}{12} > 0$



donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

(2) On a $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12}$

$$= 1 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

et $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

(3) Soit $A = \frac{\sqrt{2} * (1+\sqrt{3})}{4}$; vérifions que $A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

$$A^2 = \frac{2(1+\sqrt{3})^2}{16} = \frac{1}{8}\left(1+3+2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right).$$

d'autre part ; $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$

ainsi on déduit $A^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

donc $A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ou $A = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

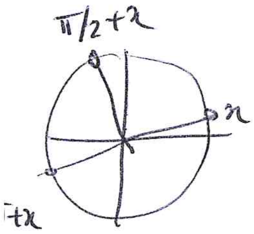
mais d'après l'expression de A ; $A > 0$

donc $\boxed{A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

La calculatrice disait donc juste : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

III

$$A(x) = \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$



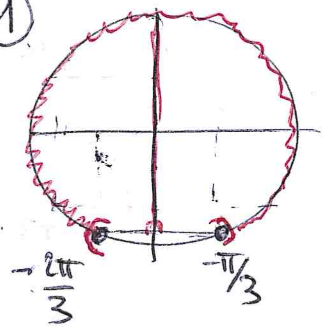
$$= \sin x - \sin x - \sin x + \cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$= -\frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

IV

1

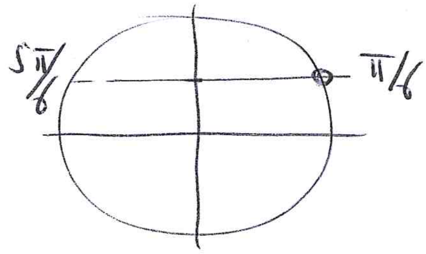


$$\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S = \left[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3} ; \pi\right]}$$

2

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$



$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

donc dans $\mathbb{R}$: $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \, ; \, \frac{5\pi}{12} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

dans $[-\pi ; \pi]$: $\boxed{S = \left\{-\frac{11\pi}{12} \, ; \, \frac{\pi}{12} \, ; \, -\frac{7\pi}{12} \, ; \, \frac{5\pi}{12}\right\}}$

V (1) Par lecture de la figure.

$\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB}$; $\vec{AR} = -\frac{1}{3}\vec{AC}$; $\vec{BQ} = \frac{3}{7}\vec{BC}$.

(2) Dans $(A ; \vec{AB} ; \vec{AC})$:

$A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0,1)$; $P(\frac{1}{4} ; 0)$; $R(0; -\frac{1}{3})$

(3) Soit $Q(x;y)$

$\vec{BQ}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\vec{BQ} = \frac{3}{7}\vec{BC} \iff \begin{cases} x-1 = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = 3/7 \end{cases}$

donc $\boxed{Q(4/7 ; 3/7)}$

(4) On déduit $\vec{PR}\begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ $\vec{PQ}\begin{pmatrix} 4/7 - 1/4 \\ 3/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{PQ}\begin{pmatrix} 9/28 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

Et $XY' - X'Y = -\frac{1}{4} \times \frac{3}{7} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{9}{28}$

$= -\frac{3}{28} + \frac{3}{28} = 0$

donc $\vec{PR}, \vec{PQ}$ colinéaires $\Rightarrow$ $\boxed{P, Q, R \text{ alignés}}$.