DS n° 15

18 mai 2015

I $f(x) = x^3$; $x \in \mathbb{R}$.

f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$

1 T_a a pour coeff directeur $f'(a) = 3a^2$ donc $\vec{u_a}\begin{pmatrix}1\\3a^2\end{pmatrix}$ vect. dir de T_a

de même, T_b a pour vecteur directeur $\vec{u_b}\begin{pmatrix}1\\3b^2\end{pmatrix}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

2 $T_a \perp T_b \iff \vec{u_a} \perp \vec{u_b}$

$$\iff \vec{u_a} \cdot \vec{u_b} = 0 \iff 1 + 9a^2b^2 = 0 \quad (*)$$

mais $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $9a^2b^2 \geqslant 0$ donc $1 + 9a^2b^2 \geqslant 1 > 0$

ainsi $(*)$ n'a pas de solution donc on ne peut avoir $T_a \perp T_b$ et ceci pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

II **1** $M(x;y) \in \mathcal{E} \iff 2MA^2 + OM^2 - MB^2 = 68$

et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-6\end{pmatrix} \Rightarrow AM^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$

$\vec{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2$

$\vec{MB}\begin{pmatrix}-x\\6-y\end{pmatrix} \Rightarrow MB^2 = x^2 + (6-y)^2$

ainsi $M(x;y) \in \mathcal{E} \iff 2\left[(x-3)^2 + (y-6)^2\right] + x^2 + y^2 - x^2 - (6-y)^2 = 68$

$$\iff 2x^2 + 2y^2 - 12x - 12y - 14 = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$$

$$\iff (x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$$

donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(3;3)$ et rayon 5.

② $M \in \mathcal{C} \iff x^2+y^2+4x-y-2=0$

$$\iff (x+2)^2+(y-\tfrac{1}{2})^2-4-\tfrac{1}{4}-2=0$$

$$\iff (x+2)^2+(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{25}{4}$$

ainsi $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ et centre $\Omega'(-2;\frac{1}{2})$.

④ $M(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{E} \iff \begin{cases} x^2+y^2-6x-6y-7=0 \\ x^2+y^2+4x-y-2=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-6x-6y-7=0 \\ 10x+5y+5=0 \quad L_2-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(2x+1)^2-6x+6(2x+1)-7=0 \quad (*) \\ y=-2x-1 \end{cases}$$

Résolution de $(*)$:

$(*) \iff 5x^2+10x=0$

$\iff 5x(x+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-2$

ainsi on a 2 points d'intersect° $I(-2;3)$ et $J(0,-1)$

⑤ ⓐ $\vec{\Omega J}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal à T_J car $[\Omega J]$ est le rayon de $\mathcal{E}$.

donc $T_J : 3x+4y+c=0$

et $J(0,-1) \in T_J \Rightarrow -4+c=0 \Rightarrow c=4$

donc $T_J : 3x+4y+4=0$.

ⓑ de même $\overrightarrow{\Omega' J}\begin{pmatrix}+2\\-3/2\end{pmatrix}$ normal à T'_J

donc $T'_J : 2x - \frac{3}{2}y + c = 0$

et $J(0\,;-1) \in T'_J \Rightarrow + \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$

donc $T'_J : 2x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

par th,

$\vec{u}'\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de T'_J et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de T_J.

et $\vec{u}' . \vec{u} = \frac{3}{2} \cdot (-4) + 3 \times 2 = 0$

donc $\vec{u} \perp \vec{u}' \Rightarrow T_J \perp T'_J$.

IV Partie A : ① $\mathcal{C} : (x-0)^2 + (y-6)^2 = 18$

② $M(x;y) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = 18 \\ y = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y + y^2 - 6 \times 2y + 36 = 18 \\ y = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 11y + 18 = 0 \quad ⊛ \\ y = x^2 \end{cases}$

Resolution de ⊛ : $\Delta = 121 - 4 \times 18 = 49$

donc ⊛ admet deux solutions : $y = \frac{11+7}{2} = 9$ ou $y = 2$

donc $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C} \iff \begin{cases} y = 9 \text{ ou } y = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

on a alors 4 points d'intersect° : $A_1(-3, 9)$; $A_2(+3; 9)$; $A_3(-\sqrt{2}; 2)$; $A_4(+\sqrt{2}, 2)$

Partie B :

① $C_m : x^2 + (y-m)^2 = 1 \iff C_m : x^2 + y^2 - 2my + m^2 - 1 = 0$

② $M(x;y) \in C_m \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2my + m^2 - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y^2 + (1-2m)y + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \\ y = x^2 \end{cases}$$

③ Pour avoir 2 couples $(x;y)$ de solution, il faut que $(*)$ n'ai qu'une solution. (Car avec $y = x^2$, on a 2 solut° pour chaque valeur de y).

Il faut que le discriminant de $*$ soit nul.

$$\Delta = (1-2m)^2 - 4(m^2 - 1)$$
$$= 1 - 4m + 4m^2 - 4m^2 + 4$$
$$= 5 - 4m$$

$$\Delta = 0 \iff m = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Ainsi pour $m = \frac{5}{4}$ on a 2 couples solution (qui sont les points où le cercle est tangent).

④ La réponse à la question est le cercle $C_{5/4}$.