DS2

I $x^4 - 32x^2 + 60 = 0.$ (E)

On pose $X = x^2$ alors (E) équivaut à $X^2 - 32X + 60 = 0$

On a alors $\Delta = 32^2 - 4.60 = 784 = 28^2$

Donc $X = \dfrac{32-28}{2} = 2$ ou $X = \dfrac{32+28}{2} = 30.$

On a donc (E) $\Leftrightarrow$ $x^2 = 2$ ou $x^2 = 30$

$\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{30}$ ou $x = -\sqrt{30}$

$$\boxed{S = \{\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{30}\,;-\sqrt{30}\}}$$

II

(I_1): $\dfrac{2}{3-x} < x$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3-x} - x < 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3-x} - \dfrac{x(3-x)}{3-x} < 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2-3x+2}{3-x} < 0$

Soit $N(x) = x^2 - 3x + 2$; on a $\Delta = 1$ et N admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

On peut dresser le tableau de signes pour l'inéquation :

x		1		2		3	
$N(x)$	+	0	−	0	+		+
$3-x$	+		+		+	0	−
Quotient	+	0	−	0	+	‖	−

Et donc $\boxed{S =]1;2[\cup]3;+\infty[}$

(I_2) : $x^3+4x^2+x \geqslant 0$

$\iff x(x^2+4x+1) \geqslant 0$

Soit $P(x) = x^2+4x+1$;

$\Delta = 16-4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

Donc P admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}$; $x_2 = -2+\sqrt{3}$

On peut alors dresser le tableau de ~~variations~~ signes :

x		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\boxed{S = [-2-\sqrt{3} ; -2+\sqrt{3}] \cup [0 ; +\infty[}$

III 1) On a $AM = x$ et $BM = 6-x$.

L'aire vaut $\mathcal{A}(x) = AM^2 + BM^2$

$= x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36.$

2) $\mathcal{A}$ est une fonction polynôme de degré 2. On peut dresser le tableau de variations :

$\alpha = \dfrac{12}{4} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = 18$

x	0		3		6
$\mathcal{A}(x)$	36	$\searrow$	18	$\nearrow$	36

Donc l'aire est minimale pour $x = 3$.
Elle vaut alors 18 u.a.

3) $\mathcal{A}(x) \geqslant 26 \iff 2x^2 - 12x + 36 \geqslant 26$

$\iff 2x^2 - 12x + 10 \geqslant 0$

$\iff x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$ ($\div 2$ avec $2 > 0$)

On a $\Delta = 36-20 = 16$

On a deux racines : $x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$

On déduit le tableau de signes:

x	0		1		5		6
x^2-6x+5		+	0	−	0	+	

Donc $A(x) \geqslant 26$ ssi $x \in [0;1] \cup [5;6]$

$\boxed{S = [0;1] \cup [5;6]}$

IV $k(x) = -x^2+3$.

① k est un polynôme de degré 2 et C_k est une parabole.

Nous avons $\alpha = -\frac{b}{2a} = 0$ et $\beta = f(\alpha) = 3$. On déduit le tableau de variations:

x		0	
$k(x)$	↗	3	↘

On peut alors tracer C_k en prenant quelques valeurs.

② $f(x) > k(x)$ ssi $x^2-2x-1 > -x^2+3$

ssi $2x^2-2x-4 > 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-x-2 > 0$ $(\div 2$ avec $2>0)$

On a $\Delta = 9$ donc il y a deux racines : $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = 2$

Donc on a le tableau de signes:

x		−1		2	
x^2-x-2	+	0	−	0	+

Alors $\boxed{S =]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[}$

③ La position relative de C_f et C_k est donnée par le signe de $d(x) = f(x) - k(x)$ et donc d'après ② on a

C_f au dessus de C_k sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

C_f en dessous de C_k sur $]1;2[$.

C_f et C_k se coupent en $x=-1$ et $x=2$

4 Points d'intersection de C_f et C_g : en $x=-1$ et $x=2$.

Donc $A(-1; f(-1))$ et $B(2, f(2))$ sont les points d'intersection.

donc $A(-1;2)$ et $B(2;-1)$

Alors $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ donc $AB^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18$ donc $\boxed{AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$

V $f(x) = x^2 - 5x + 5$; $g(x) = 2x - 1$

$$M(x;y) \in C_f \cap C_g \iff f(x) = g(x)$$

$$\iff x^2 - 5x + 5 = 2x - 1$$

$$\iff x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25$$

donc Nous avons deux points d'intersection d'abscisse

$x_1 = \frac{7+5}{2} = 6$ et $\frac{7-5}{2} = 1$

L'ordonnée est alors donnée par $g(x_1)$ et $g(x_2)$.

Les points sont $A(6;11)$ et $B(1;1)$.