Correction DS7. Sujet sur 20.

I $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)5 - 5x \times 2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2} = 5 \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

2) Sur $\mathbb{R}$, $5>0$; $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $N(x) = 1-x^2$

$N(x) = 1-x^2$
$= (1-x)(1+x)$ donc -1 et 1 sont les racines de N

d'où le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-5/2$	$\nearrow$	$5/2$	$\searrow$

3) Par th. : $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

On a $f'(2) = 5 \cdot \dfrac{-3}{25} = -\dfrac{3}{5}$.

$f(2) = \dfrac{10}{5} = 2$

donc $T : y = -\dfrac{3}{5}(x-2) + 2$ donc $T : y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{16}{5}$.

II ① On a pour $x \geq 0$ $A(x) = x \times f(x)$

donc $A(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

② A est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \geq 0 \; ; \quad A'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - x(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Comme $(x^2 - x + 1)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$; $A'(x)$ est du signe de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$;

On déduit le signe de $A'(x)$ et le tableau de variations de A

x	0		1		
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

③ D'après le tableau de variations, A admet un maximum pour $x = 1$

Le rectangle est d'aire maximale lorsque M a pour abscisse 1.

III ① D'après le graphe on conjecture que deux tangentes passent par $A(0;-1)$

② Soit Δ_a la tangente au point d'abscisse a.

On a $\Delta_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

mais $A(0,-1) \in \Delta_a$ donc $-1 = f'(a)(-a) + f(a)$

c.à.d $-1 = (2a+2)(-a) + a^2 + 2a + 1$

donc $-a^2 = -2$ donc $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$

Il y a donc deux tangentes passant par $A(0,-1)$.

L'une au point de contact $a = \sqrt{2}$ et l'autre au pt de contact $a = -\sqrt{2}$

Les équations sont :

- En $a = \sqrt{2}$.

$\Delta : y = (2\sqrt{2}+2)(x-\sqrt{2}) + 2 + 2\sqrt{2} + 1$

donc $\Delta : y = (2\sqrt{2}+2)x - 1$

- En $a = -\sqrt{2}$:

$\Delta' : y = (2-2\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) + 2 - 2\sqrt{2} + 1$

donc $\Delta' : y = (2-2\sqrt{2})x - 1$

On remarque qu'on a bien $A \in \Delta$ et $A \in \Delta'$.

② Soit $\Delta : y = 3x$.

On cherche une tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}_f$ parallèle à Δ.
Soit a le point de contact de $\mathcal{D}$, Alors $\mathcal{D}$ a pour coeff dir $f'(a)$

donc $\mathcal{D} // \Delta$ ssi $f'(a) = 3$

c.à.d $2a+2 = 3$ donc $a = \frac{1}{2}$.

La tangente a alors pour équation : $\mathcal{D} : y = f'(a)(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

c.à.d : $\mathcal{D} : y = 3(x - \frac{1}{2}) + \frac{9}{4}$

$\mathcal{D} : y = 3x + \frac{3}{4}$.

Devoir n° 7 : Dérivation (1h)

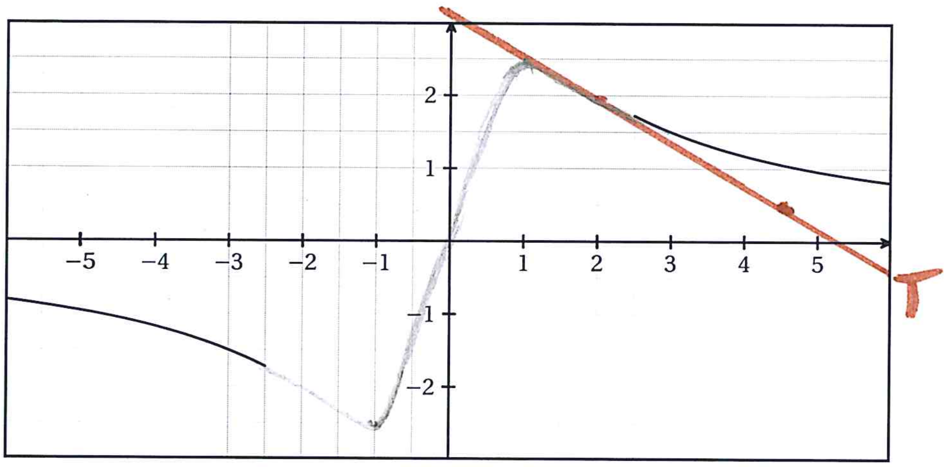
I **(6 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$$

.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courne représentative dans un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

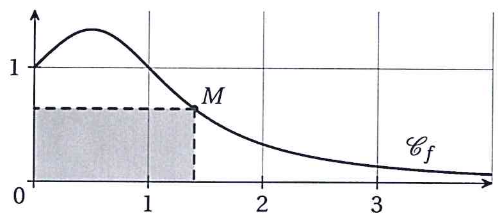
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.
3. Déterminer la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 2.
4. Sur le graphe ci-dessous où $\mathscr{C}_f$ est partiellement tracée, tracer alors Δ et $\mathscr{C}_f$.



II **(7 points)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
On considère un point M d'abscisse x appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et on construit comme l'indique la figure ci-dessous un rectangle de sommets O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

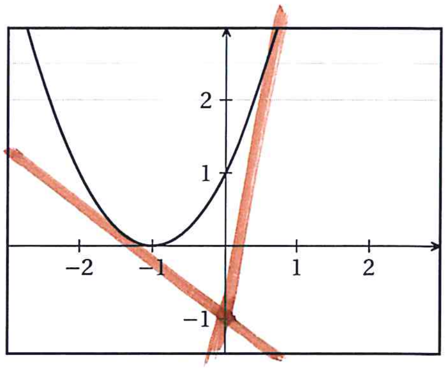


On note $A(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de x.

1. Donner l'expression de la fonction A.
2. Étudier les variations de A.
3. Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle soit maximale.

III (7 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. On donne le graphe ci-contre.
Soit $A(0; -1)$



1. Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.
2. Déterminez ces tangentes.
3. Soit $\Delta : y = 3x$. Y-a-t-il des tangentes parallèles à Δ ? Si oui, préciser le point de contact et l'équation.