DS 31 janv 2020.

I

① $\vec{AB}.\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4^2+3^2-6^2\right) = \boxed{-\frac{11}{2}}$

② $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC\cos\widehat{BAC}$

$= 6^2 . \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{18\sqrt{3}}$

③ $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$ par project° de C sur (AB) en H

$= 18.$

II $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

① $\vec{AB}.\vec{AC} = -4+2 = -2$

② $AB^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$

$AC^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$ donc $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

③ On a aussi $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC\cos\widehat{BAC}$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB.AC}$

$= \dfrac{-2}{2\sqrt{2}\sqrt{5}}$

donc à l'aide de la calculatrice $\boxed{\widehat{BAC} \approx 108,4°}$.

III ① $AB = 5$; soit I le milieu de $[AB]$.

$M \in \mathcal{E}$ ssi $\vec{AM}.\vec{BM} = 5$

ssi $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5$

$\Leftrightarrow MI^2 = 5 + \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{45}{4}$

$\Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre I et rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

De même : $M \in \mathcal{F} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -7$

$\iff MI^2 = -7 + \frac{25}{4} < 0$ (impossible)

donc $\mathcal{F} = \emptyset$

IV $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$; $AB = 2$; $AC = 3$

Alors $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (D'après Chasles)

$= BA^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

$= 4 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 - 4 = 0$

Donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ donc ABC rectangle en B.

V ① ADC rectangle en D donc par th de Pythagore :

- $AC^2 = DA^2 + DC^2$
  $= 36 + 9 = 45$ donc $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

De m̂ ABD rectangle en A donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$

$= 8^2 + 6^2 = 100$

donc $BD = 10$.

② On a en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

$= \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DA}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DA}}} + \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}}_{\substack{= -CD.AB \\ \text{car } \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \\ \text{colinéaires}}} + DA^2 + \underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AB}}}$

$= -3 \times 8 + 36$

$= 12$

③ D'autre part, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = CA.DB.\cos(\widehat{AOB})$

donc $\cos(\widehat{AOB}) = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}}{CA.DB}$

Donc $\cos(\widehat{AOB}) = \dfrac{12}{10.3\sqrt{5}}$

et d'après la calculatrice $\boxed{\widehat{AOB} \simeq 80^\circ}$

VI On utilise encore Chasles.

On a $\vec{AB}.\vec{AC} = (\vec{AR}+\vec{RC}).(\vec{AP}+\vec{PB})$

$$= \underbrace{\vec{AR}.\vec{AP}}_{=0} + \underbrace{\vec{AR}.\vec{PB}}_{\text{colinéaires}} + \underbrace{\vec{RC}.\vec{AP}}_{\text{colinéaires}} + \underbrace{\vec{RC}.\vec{PB}}_{=0}$$

$$= AR.PB + RC.AP$$

$$= 6\times 3 + 6.3$$

$$= 36.$$