DS 12 (Suites).

I ① $u_1 = -12$; $u_5 = 0$

(u_n) arith. alors $\quad u_n = u_1 + (n-1)r \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

donc $\quad u_5 = u_1 + 4r$

donc $\quad 0 = -12 + 4r \quad$ donc $r = \frac{12}{4} = 3$.

On sait aussi que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

donc $\quad u_n = u_0 + n.3$

alors pour $n=5 \quad u_5 = u_0 + 5.3$

donc $\quad 0 = u_0 + 15 \quad$ donc $u_0 = -15$

② $S = 10 + 20 + \cdots + 170 + 180$

$= \frac{10+180}{2} . 18 \quad$ (par th de la somme des termes d'une suite arithmétique)

$= 95 . 18 = 1710$.

II 1) (v_n) géométrique. $v_2 = 2$; $v_5 = 54$

par th $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = v_0 \cdot q^n$.

alors $v_2 = v_0 \cdot q^2$ c.à.d $2 = v_0 \cdot q^2$ $\;*$

et $v_5 = v_0 \cdot q^5$ c.à.d $54 = v_0 \cdot q^5$

On a alors par division : $\dfrac{54}{2} = \dfrac{v_0 q^5}{v_0 \cdot q^2}$

donc $27 = q^3$

donc $q = 3$. (on dit $\sqrt[3]{27} = 3$)

alors avec $*$ on a $2 = v_0 \cdot 3^2$ donc $v_0 = \dfrac{2}{9}$.

$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$.

$1 + q + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

(par th)

(v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et premier terme $v_0 = \dfrac{2}{9}$.

2) $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 1024$

$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2047$

Télécharger

2048

III $(u_n) \nearrow$ si $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\searrow$ si $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1 $u_n = 5n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3)$

$= 5n + 5 - 5n$

$= 5 \geq 0$

donc (u_n) est croissante.

2 $v_n = \dfrac{2n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2(n+1)}{n+2} - \dfrac{2n}{n+1}$

$= \dfrac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

donc

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \left(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n \right)$

$= \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot 1$

pour $n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n \geq 0$

donc $(v_n) \nearrow$.

3 $w_{n+1} = w_n - n^2$; $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$w_{n+1} - w_n = -n^2 < 0$

donc (w_n) est décroissante.

IV 1a) u_n la masse au $n^{\text{ième}}$ jour en g.

alors $u_{n+1} = \underbrace{1{,}2}_{\text{augmentat}^{\circ}\text{ de } 20\%} u_n \underbrace{-100}_{\text{perte de } 100g}$; $u_0 = 1000g$.

b) $u_1 = 1{,}2u_0 - 100$

$= 1{,}2.1000 - 100 = 1100$ g

$u_2 = 1{,}2.1100 - 100$

$= 1220$ g.

. On a $u_1 - u_0 = 100$ et $u_2 - u_1 = 120$

donc (u_n) n'est pas arithmétique

. D'autre part $\frac{u_1}{u_0} = 1{,}1$

et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1220}{1100} \approx 1{,}109$

Donc (u_n) n'est pas géométrique

c) D'après la calculatrice :

$u_{22} = 22\,103$ g

$u_{23} = 33\,623$ g

Au $23^{\text{ème}}$ jour on a dépassé 30kg.

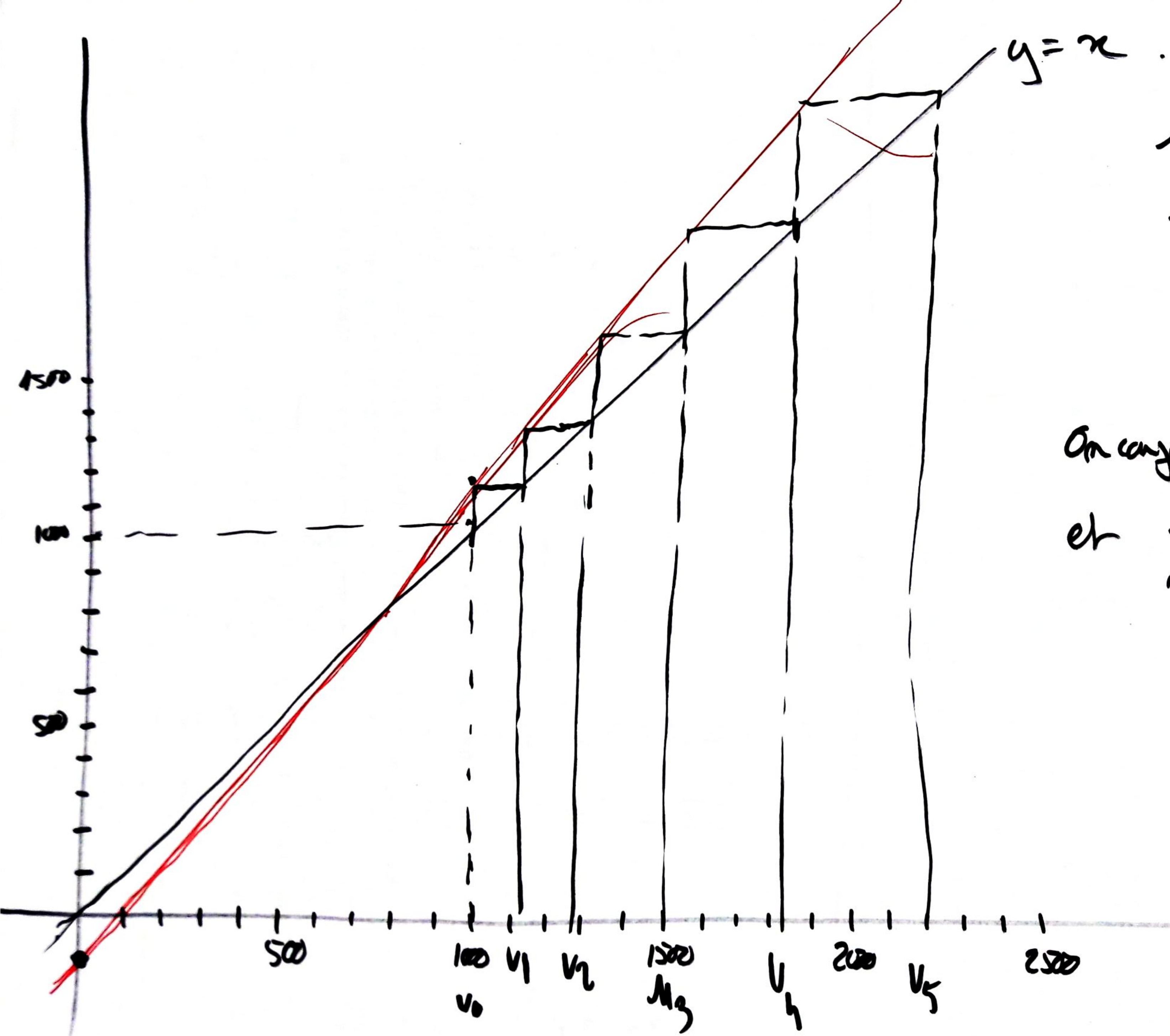
d) tant que $u_n \leq 30$

u prend la valeur $1{,}2u - 100$

$n = n+1$

Fin tant que

Afficher n



$u_{n+1} = f(u_n)$

$f(x) = 1,2x - 100$

On conjecture $(u_n) \nearrow$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3) a) $v_n = u_n - 500$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$= 1{,}2\, u_n - 100 - 500$

$= 1{,}2\, u_n - 600$

$= 1{,}2 \left(u_n - \frac{600}{1{,}2} \right)$

$= 1{,}2 \left(u_n - 500 \right)$

$= 1{,}2\, v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison 1,2

et 1er terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$

b) Par th $v_n = v_0 \cdot q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $v_n = 500 \cdot 1{,}2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 500$

donc $u_n = v_n + 500$

Donc $u_n = 500 \cdot 1{,}2^n + 500$.

c) On remarque que $\lim_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.