DS 13 - Géométrie repérée

I $\mathcal{D} : 3x - y + 5 = 0 \quad A(-1,3)$

1a $\mathcal{D}_1 \,/\!/\, \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ ont même vecteur normal

donc $\mathcal{D}_1 : 3x - y + c = 0$

et $A(-1,3) \in \mathcal{D}_1$ donc $-3 - 3 + c = 0$

donc $c = 6$ et

$\underline{\mathcal{D}_1 : 3x - y + 6 = 0}$

1b $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur normal de $\mathcal{D}$

et $\mathcal{D}_2 \perp \mathcal{D}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur dir de $\mathcal{D}_2$.

Rappel : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix} +1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{D}_2$

donc $\mathcal{D}_2 : x + 3y + c = 0$

et $A(-1,3) \in \mathcal{D}_2$

donc $-1 + 9 + c = 0$ donc $c = -8$

donc $\underline{\mathcal{D}_2 : x + 3y - 8 = 0}$

2a $\mathcal{C}(I, 4)$ avec $I(3, -1)$

D'après le cours

$\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16.$

2b) $B(-2,1)$; $C(4,-1)$

alors Ω milieu de $[BC]$

satisfait $\Omega(1;0)$

le rayon $r = \Omega B$.

$\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donc $\Omega B^2 = 10$

donc $r = \sqrt{10}$

Alors $\mathcal{C}' : (x-1)^2 + y^2 = 10.$

II) $A(6,0)$; $B(8,4)$

1) $\mathcal{C} : x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$

$x_O^2 + 6x_O + y_O^2 - 8y_O = 0$ donc $O \in \mathcal{C}$.

$x_A^2 + 6x_A + y_A^2 - 8y_A = 36 - 36 = 0$ donc $A \in \mathcal{C}$

de $\hat{m}$

$x_B^2 - 6x_B + y_B^2 - 8y_B = 8^2 - 6.8 + 16 - 32 = 0$

donc $B \in \mathcal{C}$

donc $O, A, B \in \mathcal{C}$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à OAB.

D'autre part : $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 = 0$

Donc $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(3,4)$ et rayon 5.

② $\Delta : x-y+6=0$

donc $\Delta : y=x+6$.

On a $M(x;y)\in\Delta\cap\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-8y=0$ et $y=x+6$

$\Leftrightarrow x^2-6x+(x+6)^2-8(x+6)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-12=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$\Delta=25$

donc on a deux solutions :

$x_1=\frac{1+5}{2}=3$ et $x_2=\frac{1-5}{2}=-2$

les ordonnées correspondantes sont

$y_1=x_1+6=9$ et $y_2=4$.

Donc on a finalement deux points d'intersection :

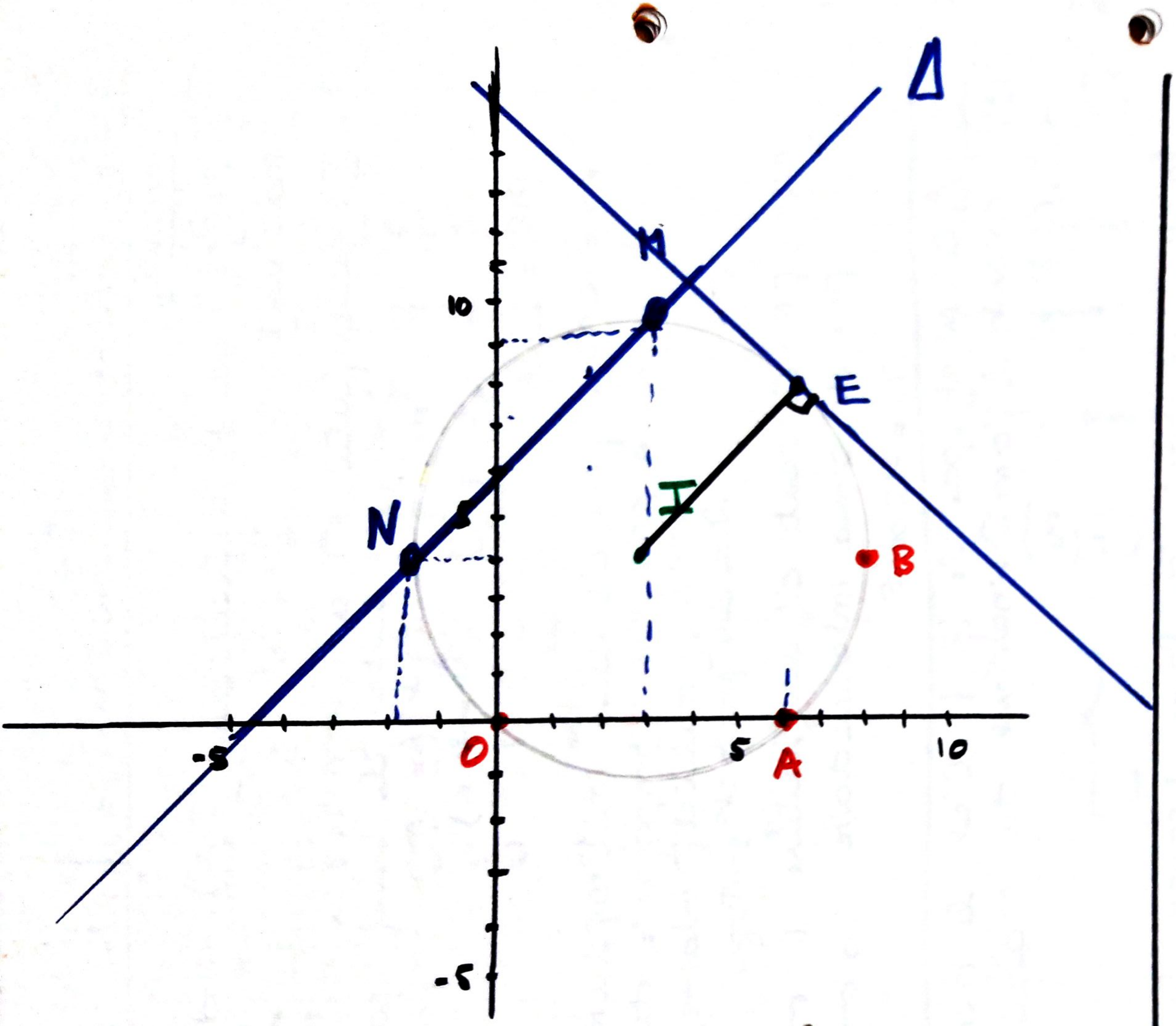
$\boxed{M(3;9) \text{ et } N(-2;4)}$.

③ Soit τ la tangente cherchée au pts $E(6,8)$

Alors $\overrightarrow{IE}$ est normal à τ

$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ donc $\tau : 3x+4y+c=0$

et $E(6,8)\in\tau$ donc $18+32+c=0$ donc $c=-50$



Donc $\mathcal{T} : 3x + 4y - 50 = 0$

donc $4y = -3x + 50$

donc $y = -\frac{3}{4}x + 12{,}5$

III $f(x)=x^2$.

1) $\Omega(0,6)$, $r=3\sqrt{2}$

donc d'après le cours :

$\mathcal{C}: x^2+(y-6)^2=18$

2a) $M(x;y)\in\mathcal{C}\cap\mathcal{P}$

ssi $x^2+(y-6)^2=18$ et $y=x^2$

$\iff y+(y-6)^2=18$ et $y=x^2$

$\iff y^2-11y+18=0$ et $y=x^2$

2b) $\Delta=11^2-4.18$

$=49$

donc $y=\frac{11+7}{2}=9$ ou $y=\frac{11-7}{2}=2$

b) alors $x^2=9$ ou $x^2=2$

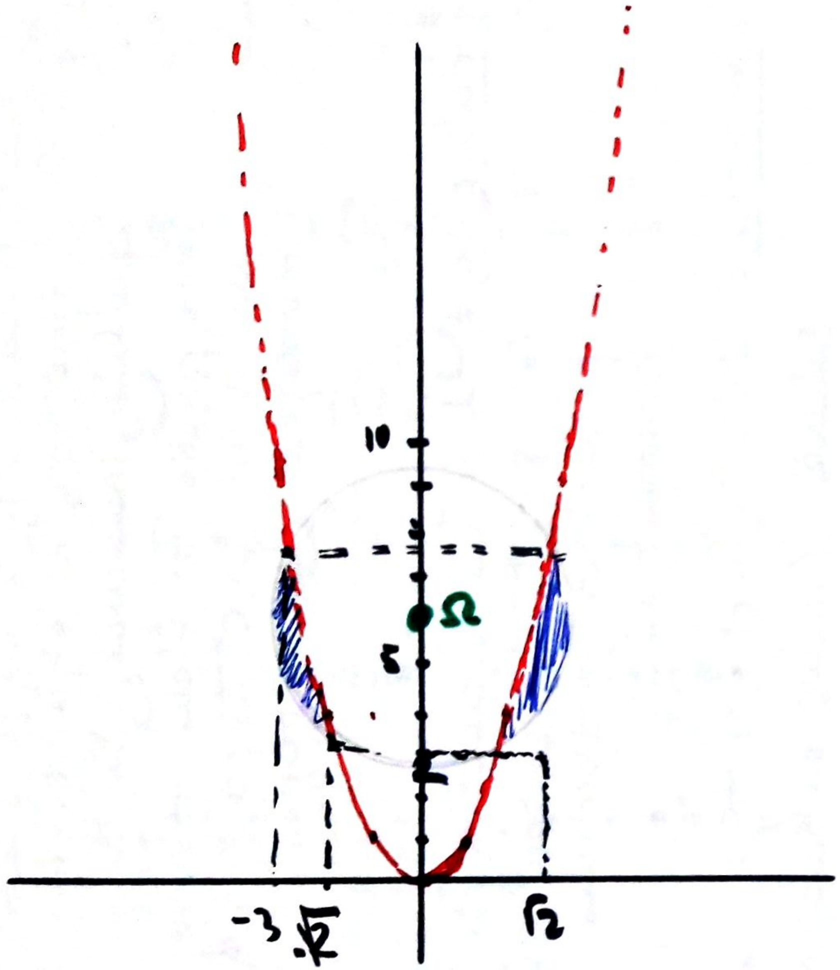
donc $x=3$ ou $x=-3$ et $y=9$

ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ et $y=2$

donc on a 4 pts d'intersection.

$A_1(3;9)$; $A_2(-3,9)$, $A_3(\sqrt{2},2)$ et $A_4(-\sqrt{2},2)$

3) $\begin{cases} y<x^2 \\ x^2+(y-6)^2\leq 18 \end{cases}$



10
5
Ω
-3
$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$

B $K_m(0,m)$ et rayon 1

1 $\mathcal{C}_m : x^2+(y-m)^2 = 1$

2 $M(x,y) \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{P}$

ssi $x^2+(y-m)^2=1$ et $y=x^2$

ssi $y+y^2-2my+m^2=1$ et $y=x^2$

ssi $\underbrace{y^2+y(1-2m)+m^2-1=0}_{E.}$ et $y=x^2$

3 Comme $y=x^2$, à chaque valeur de y on obtient deux pts d'intersection

Il faut donc une unique solut° pour (E). c.à.d il faut $\Delta=0$.

Discriminant de (E):

$\Delta=(1-2m)^2-4(m^2-1)$

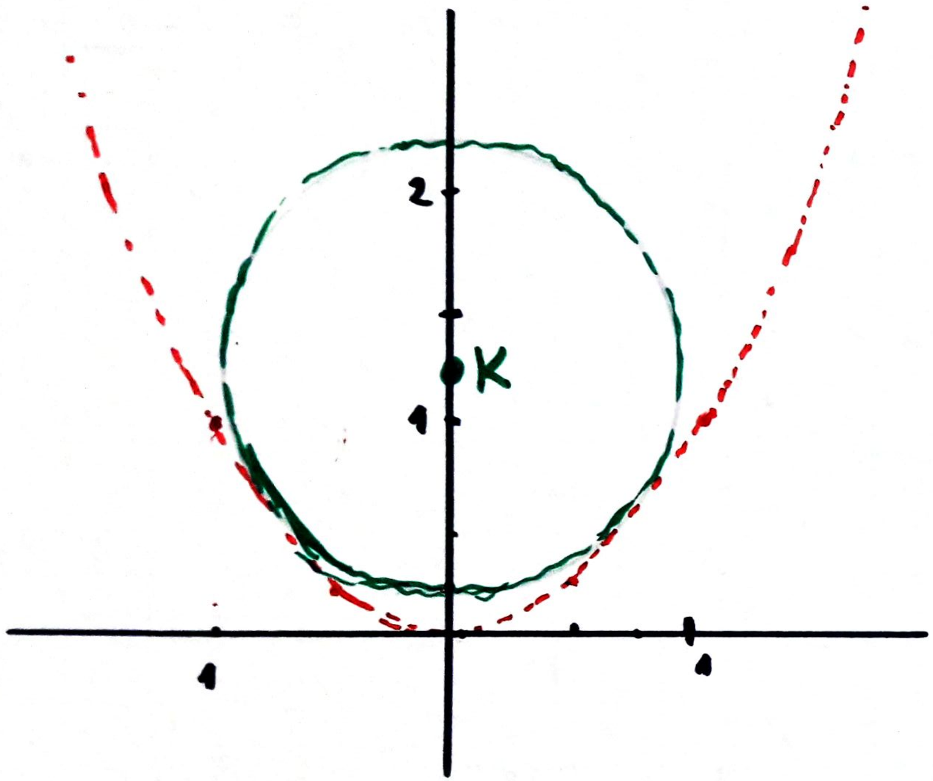
$=-4m+5$

$\#\mathcal{P}\cap\mathcal{C}_m = 2 \iff \Delta=0$

$\iff -4m+5=0$

$\iff m=5/4$

4 Pour $m=5/4$ on a uniquement deux points d'intersection. Le cercle est alors de centre $K(0;1{,}25)$ et rayon 1



2
K
1
1
1