DS 14

I

E_1 : $$\frac{e^{x^2}(e^{-5})^3}{(e^x)^2} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{e^{x^2-15}}{e^{2x}} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow e^{x^2-15} \leq e^{2x}$$ ($\times e^{2x}$ avec $e^{2x} > 0$)

$\Longleftrightarrow x^2 - 15 \leq 2x$ car exp s.$\uparrow$ sur $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0$

$\Delta = 4 + 60 = 64 > 0$

donc on a deux racines : $x_1 = \frac{2+8}{2} = 5$

$x_2 = \frac{2-8}{2} = -3$

On a alors le signe

x		-3		5	
$x^2-2x+15$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\boxed{S = [-3;5]}$

(E_2) : $(e^x+8)(e^x - e) = 0$

$\Longleftrightarrow \underbrace{e^x + 8 = 0}_{\text{impossible car } e^x > 0}$ ou $e^x - e = 0$

$\Longleftrightarrow e^x - e = 0$

$\Longleftrightarrow e^x = e^1$ $\Longleftrightarrow x = 1$ car exp s.$\uparrow$

$\boxed{S = \{1\}}$

(E_3) : $e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$

on pose $X = e^{x}$

alors $(E_3) \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

donc $X = \frac{-2+4}{2} = 1$ ou $X = \frac{-2-4}{2} = -3$

donc $e^{x} = 1$ ou $\underbrace{e^{x} = -3}_{\text{impossible car } e^{x} > 0}$

donc $x = 0$

$$\boxed{S = \{0\}}$$

(E_4) : $\frac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$

$\Leftrightarrow e^{4x+1-(2x+3)} = e$

$\Leftrightarrow 4x + 1 - 2x - 3 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = 3$

$\Leftrightarrow x = 3/2$

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

II

$f_1(x) = e^{-5x+3}$

$f_1'(x) = -5e^{-5x+3}$ et donc $\boxed{f_1'(x) < 0}$ car $e^{-5x+3} > 0$

$f_2(x) = \frac{e^{2x+1}}{3x-5}$

$f_2'(x) = \frac{(3x-5)2e^{2x+1} - 3.e^{2x+1}}{(3x-5)^2}$

Donc $f_2'(x) = \dfrac{((3x-5).2 - 3)\, e^{2x+1}}{(3x-5)^2}$

$$= \frac{e^{2x+1}(6x-13)}{(3x-5)^2}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{2x+1} > 0$

pour $x \neq 5/3$ $(3x-5)^2 > 0$

donc $f_2'(x)$ est du signe de $6x-13$.

x		$5/3$		$13/6$	
$6x-13$	$-$	‖	$-$	0	$+$

avec $\frac{5}{3}$ valeur interdite

$f_3(x) = \dfrac{e^{-x+2}}{x^2-x-2}$ $x=-1$ et $x=2$ valeurs interdites

$$f_3'(x) = \frac{(x^2-x-2)(-e^{-x+2}) - (e^{-x+2})(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{e^{-x+2}(-x^2+x+2-2x+1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{e^{-x+2}(-x^2-x+3)}{(x^2-x-2)^2}$$

$e^{-x+2} > 0$; $(x^2-x-2)^2 \geq 0$

Donc $f_3'(x)$ est du signe de $-x^2-x+3 = P(x)$

$\Delta = 1+12$ donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{-2} = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$

et $x_2 = -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$

D'où le signe

x		x_2		-1		x_1		2	
$f_3'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$

III

$f(x) = xe^{-x}$; $g(x) = xe^{-x} - 2x$

$T_1 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$T_2 : y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x})$

$= e^{-x}(1-x)$

$g'(x) = f'(x) - 2$

Donc $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$

$g(0) = 0$; $g'(0) = -1$

Donc $T_1 : y = x$

$T_2 : y = -x$

D'après la calculatrice T_1 et T_2 semblent perpendiculaires.

T_1 a pour vecteur dir $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

T_2 . . ——— — $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

et $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 1 - 1 = 0$

Donc $\vec{u_1} \perp \vec{u_2}$ donc $T_1 \perp T_2$.