DS2.

I ① D'après les racines de f_1 on a

$f_1(x) = a(x+2)(x-3)$

de plus $f_1(-1)=-2$ donc $a(1)(-4) = -2$

donc $a = +\frac{2}{4} = +\frac{1}{2}$

ainsi $f_1(x) = +\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$.

② D'après le graphique de f_2 on a la forme canonique suivante :

$f_2(x) = a(x-2)^2+3$

de plus $f_2(-1)=0$ donc $a(-3)^2+3=0$

donc $9a=-3$ et $a=-\frac{1}{3}$

ainsi $f_2(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2+3$

II $(E_1) : x^4 - 30x^2 + 64 = 0$

On pose $X = x^2$

Alors $(E_1) \iff X^2 - 30X + 64 = 0$

$\Delta = 30^2 - 4.64 = 644$

$= 4.161$ et donc $\sqrt{\Delta} = 2.\sqrt{161}$

Donc on a deux racines :

$X_1 = \dfrac{30 - 2\sqrt{161}}{2} = 15 - \sqrt{161} > 0$ (car $\sqrt{169} = 13$)

ou $X_2 = 15 + \sqrt{161} > 0$

donc $(E_1) \iff x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$

$\iff x = \sqrt{X_1}$ ou $x = -\sqrt{X_1}$

ou $x = \sqrt{X_2}$ ou $x = -\sqrt{X_2}$

ainsi on a quatre solutions et

$$\boxed{S = \left\{ \sqrt{15+\sqrt{161}} \, ; \, -\sqrt{15+\sqrt{161}} \, ; \, \sqrt{15-\sqrt{161}} \, ; \, -\sqrt{15-\sqrt{161}} \right.}$$

III ① $\frac{2}{3-x} < x$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3-x} - x < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2 - x(3-x)}{3-x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{3-x} < 0$

Soit $N(x) = x^2 - 3x + 2$

$\Delta = 1$ donc N admet deux racines : $x_1 = \frac{3-1}{2} = 2/2 = 1$

$x_2 = 2$

On a donc le tableau de signes :

x		1		2		3	
$N(x)$	+	0	-	0	+		+
$3-x$	+		+		+	0	-
Quotient	+	0	-	0	+	||	-

Alors $S =]1;2[\cup]3;+\infty[$

② $x^3 + 4x^2 + x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 1) \geqslant 0$

Soit $N(x) = x^2 + 4x + 1$

$\Delta = 16 - 4 = 12$ donc N admet 2 racines : $x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -2-\sqrt{3}$ ou $x_2 = -2+\sqrt{3}$
$\simeq -3,7$ $\simeq -0,3$

Ainsi on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2		0	$+\infty$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$N(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\boxed{S = [-2-\sqrt{3} ; -2+\sqrt{3}] \cup [0, +\infty[}$

IV ① La longueur x doit être inférieure à 8 et 15

donc $x \in [0 ; 8]$

② L'aire $f(x)$ est la somme de celle des deux rectangles de côté (x et $8-x$) et (x et $15-x$)

ainsi $f(x) = x(8-x) + x(15-x)$

$= -2x^2 + 23x$.

③ f est un polynôme de degré 2

avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{23}{4}$ et $\beta = f(\alpha) = -2.\left(\frac{23}{4}\right)^2 + 23.\frac{23}{4}$

$= 23^2.\left(-\frac{2}{16} + \frac{1}{4}\right)$

$= 23^2.\frac{1}{8} = \frac{529}{8}$

On a alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$23/4$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{529}{8}$	$\searrow$	

④ D'après le tableau de variation l'aire est maximale pour $x = \frac{23}{4}$ et vaut $\frac{529}{8}$ u.a.

V ① $k(x) = -x^2 + 3$.

k est un polynôme de degré 2 avec $\alpha = 0$; $\beta = 3$.
et le tableau de variation est :

x		0	
$k(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

D'où le graphe C_k

② $f(x) > k(x)$ ssi $x^2 - 2x - 1 > -x^2 + 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$

$\Delta = 9$ donc $x^2 - x - 2$ admet deux racines : $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

ainsi on a le tableau :

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

③ La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ est donnée par le signe de $d(x) = f(x) - h(x)$.

D'après ce qui précède on déduit que :

- pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]2, +\infty[$, $d(x) > 0$

donc $\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_h$

- pour $x \in]-1 ; 2[$; $d(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_h$

④ $M(x ; y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_h$ ssi $f(x) = h(x)$

ssi $x = -1$ ou $x = 2$ d'après ②

ainsi les points d'intersection sont :

$A(-1 ; f(-1))$; $B(2 ; f(2))$ c.à.d $A(-1 ; 2)$; $B(2 ; -1)$

on a alors $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $AB^2 = 9 + 9 = 18$

et $AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.