DS 3 du 13 novembre 2020

I On lit graphiquement que $f'(-1)=2$; $f'(2)=-\frac{2}{3}$; $f'(5)=\frac{1}{3}$

Les racines sont $-\frac{3}{2}$; 2 et 5

II On a $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ pour $x\neq 1$

1) $$t(h)=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\frac{1}{h}\left(\frac{2(3+h)-3}{3+h-1}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(\frac{2h+3}{2+h}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(\frac{2(2h+3)-3(2+h)}{2(2+h)}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\,\frac{h}{2(2+h)}$$
$$=\frac{1}{2(2+h)}$$

2) et 3) On déduit $\lim\limits_{h\to 0} t(h)=\frac{1}{4}$

En conséquence, f est dérivable en 3 et $\boxed{f'(3)=\frac{1}{4}}$

III 1) On a (avec $h\neq 0$) $$t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$
$$=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}$$

Donc $t(h) = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}$

② ⓐ Ainsi, lorsque $a>0$, on déduit que $\lim_{h \to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Ainsi, la limite de t existe et est finie, donc f dérivable en a et $\boxed{f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}}$

ⓑ Si $a=0$, alors $t(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ (avec $h \neq 0$)

et donc $\lim_{h \to 0} t(h) = +\infty$

Ainsi f non dérivable en 0. Par contre en 0 la courbe présente une tangente verticale (Coeff dir ∞)

IV $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x \in \mathbb{R}$

① f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$

② Ainsi, on déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variat° de f

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

On a $f(0)=0$ et $f(2) = 2^3 - 12$
$= -4$

③ Par théorème du cours : $\mathcal{D} : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

ici $f'(1) = -3$ et $f(1) = -2$

Donc $\mathcal{D} : y = -3(x-1) - 2$ donc finalement $\mathcal{D} : y = -3x + 1$

V **1** $M(x;y) \in \mathcal{P} \cap d_m$ ssi $x^2 = mx + m - 3$

c'est-à-dire $x^2 - mx - m + 3 = 0$

2 Il s'agit d'une équat° de degré 2 et on a

$$\Delta_m = m^2 - 4(-m+3)$$
$$= m^2 + 4m - 12$$

Soit $\Delta' = 16 + 4.12 = 64$ ainsi Δ_m a deux racines.

$m_1 = \frac{-4+8}{2} = 2$ et $m_2 = -6$

On déduit alors le tableau de signe de Δ_m :

m	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

3 On déduit donc que • si $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$
On a alors deux points d'intersect°

• Si $m \in \{-6; 2\}$ On a un point d'intersect° unique.

• Si $m \in]-6; 2[$ Il n'y a pas de pt d'intersect°

4 Pour $m = -6$ on a un pt d'intersect° et la droite correspondante est

$d_6 : y = -6x - 9$

Rmq : On peut tracer d_6 avec 2 pts : $A(-1;-3)$; $B(-2;3)$

Pour $m = 2$ on a de même $d_2 : y = 2x - 1$ (se trace direct)

On s'aperçoit alors que ces deux droites sont des tangentes à $\mathcal{P}$

⚠ Ce n'est qu'une conjecture !

5 Sur le graphique, on constate que les droites d_{-6} et d_2 se coupent en $A(-1;-3)$

Montrons que ce point est un point de chacune des droites d_m.
Il suffit de vérifier que l'équat° de d_m est satisfaite par A

On a $m x_A + m - 3 = -m + m - 3$

$$= -3$$

$$= y_A$$

Ainsi $\forall m \in \mathbb{R},\ A \in d_m$