DS N°5

(I) **(4 points)** Sur le cercle trigonométrique, placer le points A_i associé au réel donné.

A_1 associé à $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$

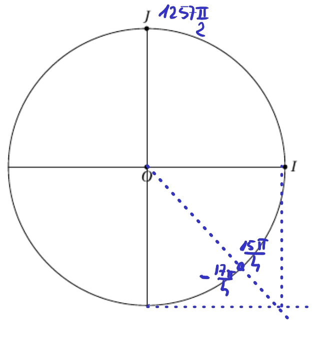
A_2 associé à $\frac{1257\pi}{2} = 628\pi + \frac{\pi}{2}$

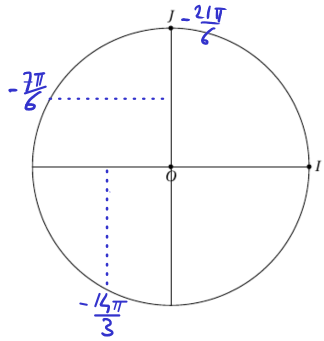
A_3 associé à $-\frac{17\pi}{4} = -\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4}$

A_4 associé à $-\frac{7\pi}{6}$

A_5 associé à $-\frac{14\pi}{3} = -\frac{15\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -5\pi + \frac{\pi}{3}$

A_6 associé à $\frac{-21\pi}{6} = -7\frac{\pi}{2}$





A l'aide du cercle complétez :

1. $\cos(-\frac{17\pi}{4}) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(-\frac{21\pi}{6}) = 1$

(II) $\sin x = 0{,}4$. On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc $\cos^2 x = 1 - 0{,}4^2$

$= 0{,}84$

ainsi $\cos x = \sqrt{0{,}84}$ ou $\cos x = -\sqrt{0{,}84}$

mais $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ donc $\cos x < 0$ ainsi $\cos x = -\sqrt{0{,}84} \approx -0{,}92$

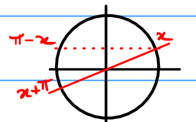
(III)

car sin et cos sont π-périodique

On a $\sin(x+9\pi) - \cos(x+7\pi) + \sin(\pi - x) = \sin(x+\pi) - \cos(x+\pi) + \sin(\pi - x)$

$= -\sin x + \cos x + \sin x$

$= \cos x$



On a $\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

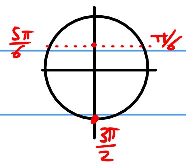
(IV) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

On pose $X = \sin x$, alors (E) $\iff 2X^2 + X - 1 = 0$

$\iff (X+1)(2X-1) = 0$ (car $X = -1$ racine évidente)

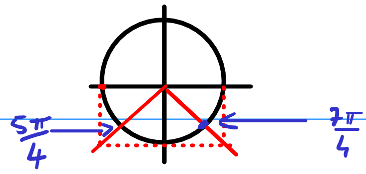
$\iff X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$

$\iff \sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$



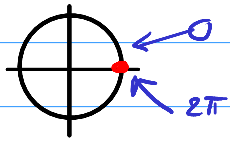
$S = \left\{ \frac{5\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} \right\}$

I. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



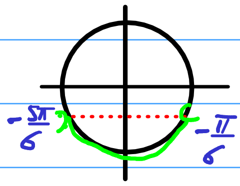
$S = \left\{ \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$

- $3\cos x = 3 \iff \cos x = 1$



$S = \{0 ; 2\pi\}$

- $\sin x < -\frac{1}{2}$

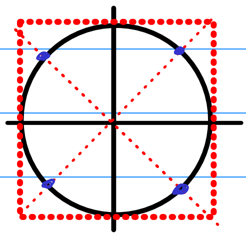


$S = \left] -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} \right[$

- $2\sin^2 x - 1 = 0$ dans $[0, 2\pi]$

$\iff \sin^2 x = \frac{1}{2} \iff |\sin x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\iff |\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



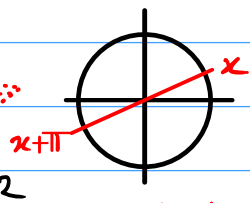
$S = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$

II. $f_1(x) = \cos^2 x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(-x) = \cos^2(-x)$

$= \cos^2 x$ (car cos est paire)

$= f_1(x)$



$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x+\pi) = \cos^2(x+\pi)$

$= [\cos(x+\pi)]^2 = [-\cos(x)]^2$

$\cos(x \mp \pi) = -\cos x$

$= (\cos x)^2$

$= f_1(x)$

Donc f_1 est π-périodique et paire

De même : $f_2(x) = \cos x \sin x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(-x) = \cos(-x)\sin(-x)$

$= \cos x(-\sin x) = -\cos x \sin x$

$= -f_2(x)$

$\uparrow$

cos pair
sin impair

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi)$

$= (-\cos x)(-\sin x) = \cos x \sin x = f_2(x)$

Donc f_2 est π- périodique et impaire

VII $f(x) = \dfrac{x^2+3x+9}{3x}$; $x>0$

1 $\forall x>0$, $f'(x) = \dfrac{3x(2x+3) - (x^2+3x+9).3}{(3x)^2}$

$$= \frac{3x^2-18}{(3x)^2} = \frac{3(x^2-9)}{(3x)^2}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $(3x)^2 > 0$ et $3>0$ donc par produit $f'(x)$ est du signe de x^2-9.

2 On a $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ et pour $x>0$, $x+3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-3$

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

$f(3) = \dfrac{3.9}{9} = 3$

③ Au point A d'abscisse 6, la tangente a pour équation

$T : y = f'(6)(x-6) + f(6)$

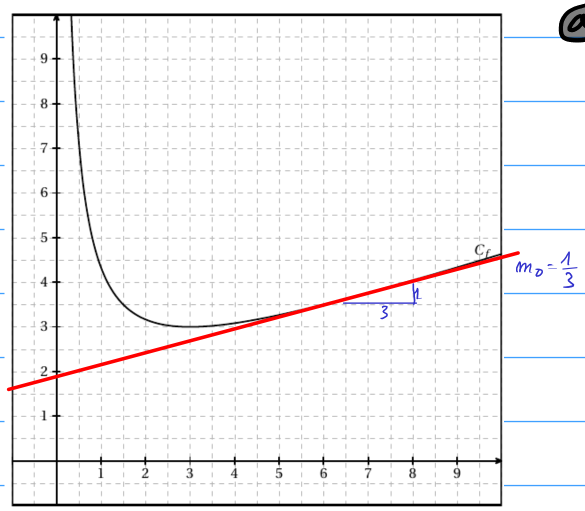
avec $f(6) = \dfrac{6^2+3.6+9}{3.6} = \dfrac{63}{18} = \dfrac{7}{2}$

$f'(6) = \dfrac{3(36-9)}{(3.6)^2} = \dfrac{3.27}{3^2.6^2} = \dfrac{1}{4}$

Ainsi $T : y = \frac{1}{4}(x-6) + \frac{7}{2}$

donc $T : y = \frac{1}{4}x + 2$

④



ⓐ D'après le graphique, il est clair que l'on peut avoir tous les coefficients directeurs possibles inférieurs à $m_0 = \frac{1}{3}$

On a donc $m \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$

ⓑ T est une tangente en $x=a$ est parallèle à D_m ssi

$f'(a) = m \iff \dfrac{3(a^2-9)}{(3a)^2} = m$

$\iff 3a^2 - 18 = 9a^2 m$

$\iff a^2 - 9 = 3a^2 m$

$\iff 9 - (3m-1)a^2 = 0$

Et cette dernière équation a des solutions ssi $3m-1 < 0$ (sinon c'est une somme de deux nbres positifs et pas de solut°)

donc ssi $\boxed{m < \frac{1}{3}}$

Cela correspond à la conjecture