1ère
15/10/2021

DS N°3

I **1** 0 et 1 sont racines de f_1.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = ax(x-1)$

De plus $f_1(-1) = 4$ donc $a(-1)(-2) = 4$
$\Leftrightarrow a = 2$

On déduit alors $\boxed{f_1(x) = 2x(x-1)}$

2 $S(2;3)$ est le sommet de C_{f_2} donc $f_2(x) = a(x-2)^2+3$

De plus $f_2(0) = 2$ donc $4a+3=2$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

On déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2+3}$

II **1.** $-2x^4+5x^2+2=0 \quad (E_1)$

On pose $X = x^2$; alors $(E_1) \Leftrightarrow -2X^2+5X+2=0$

$\Delta = 25+16 = 41$

Ainsi $X = \frac{-5-\sqrt{41}}{-4}$ ou $X = \frac{-5+\sqrt{41}}{-4}$

$= \frac{1}{4}(5+\sqrt{41})$ $\qquad = \frac{1}{4}(5-\sqrt{41})$

$\approx 2{,}85$ $\qquad \approx -0{,}35$

Alors $(E_1) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}(5+\sqrt{41})$ ou $x^2 = \underbrace{\frac{1}{4}(5-\sqrt{41})}_{<0}$ impossible

Donc $\quad x = \sqrt{\frac{1}{4}(5+\sqrt{41})} \quad$ ou $\quad x = -\sqrt{\frac{1}{4}(5+\sqrt{41})}$

$\quad\quad = \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{41}} \quad\quad\quad\quad = -\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{41}}$

Donc $\boxed{S = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{41}} \; ; -\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{41}} \right\}}$

2 $\quad \dfrac{3x^2+8x-3}{x^2-8} > 0$

Soit $N(x) = 3x^2+8x-3$

$\Delta = 64+36$

$\quad = 100$

Alors N admet comme racines $x_1 = \dfrac{-8+10}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = -\dfrac{18}{6} = -3$

Soit $D(x) = x^2-8$

$\quad\quad = (x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$

On a alors le tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		$-2\sqrt{2}$		$1/3$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$N(x)$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$D(x)$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$\dfrac{N(x)}{D(x)}$		+	0	−	||	+	0	−	||	+	

Alors $\boxed{S =]-\infty; -3[\cup]-2\sqrt{2}; \frac{1}{3}[\cup]2\sqrt{2}; +\infty[}$

3 $3x+2 < \frac{5}{x}$

$\Leftrightarrow \quad 3x+2-\frac{5}{x} < 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2+2x-5}{x} < 0$

Soit $N(x) = 3x^2+2x-5$

$\Delta = 4+60 = 64$ donc N admet deux racines : $x_1 = \frac{-2+8}{6} = 1$; $x_2 = -\frac{10}{6}$
$= -\frac{5}{3}$

On a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		0		1		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{N(x)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Alors $\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right[\cup \left]0 ; 1\right[}$

III $M(x;y) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_m \Leftrightarrow -2x^2+5x-3 = mx+5$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x(m-5) + 8 = 0$

On a $\Delta_m = (m-5)^2 - 64$
$= (m-5-8)(m-5+8)$
$= (m-13)(m+3)$

On a :

m		-3		13	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$

On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_m = \phi$ ssi $\Delta_m < 0$

Donc, il n'y a pas de point d'intersection lorsque $m \in]-3\,;\,13[$

(c'est cohérent avec le dessin)

IV 2 $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$

On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

$= \dfrac{3}{4}$

et $\beta = f(\alpha)$

$= 2 \cdot \dfrac{9}{16} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) - 5$

$= \dfrac{1}{16}(18 - 36 - 80)$

$= -\dfrac{98}{16}$

$= -\dfrac{49}{8} = -6{,}125$

On a alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{49}{8}$	$\nearrow$

3 La position relative de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de

$d(x) = f(x) - (-x + 7)$

$= 2x^2 - 3x - 5 + x - 7$

$= 2x^2 - 2x - 12$

$= 2\underbrace{(x^2 - x - 6)}_{d'(x)}$

Signe de $d'(x)$: $\Delta = 25$ donc on a deux racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$; $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

On a alors le signe :

x		-2		3	
$d'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi sur $]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{D}$

sur $]-2 ; 3[$, $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{D}$.

V Soit x la largeur du rectangle.

Alors $x(x+9) = 178$

$\iff x^2 + 9x - 178 = 0$

$\Delta = 81 + 4 \cdot 178$

$= 793$

Alors $x = \frac{-9-\sqrt{793}}{2} < 0$ donc impossible

ou $x = \frac{-9+\sqrt{793}}{2} \approx 9{,}58$

Ainsi les dimensions du rectangle sont $\boxed{\ell = \frac{-9+\sqrt{793}}{2} \text{ et } L = \frac{9+\sqrt{793}}{2}}$

VI **1** $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_h \iff f(x) = h(x)$

$\iff f(x) - h(x) = 0$

$\iff (4x-5)(5x+4)\frac{1}{20} = 0$ (d'après géogebra)

$\iff x = \frac{5}{4}$ ou $x = -\frac{4}{5}$

l'ordonnée est alors $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$ ou $f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$

Ainsi $A\left(-\frac{4}{5} ; \frac{16}{25}\right)$ et $B\left(\frac{5}{4} ; \frac{25}{16}\right)$

2 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{5}{4}+\frac{4}{5} \\ \frac{25}{16}-\frac{16}{25} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 41/20 \\ \frac{369}{400} \end{pmatrix}$

Et donc $AB^2 = \left(\frac{41}{20}\right)^2 + \left(\frac{369}{400}\right)^2$

$$= \frac{308561}{160\,000}$$

On déduit $\boxed{AB = \frac{41\sqrt{481}}{400} \approx 2,25}$

3 Pour $M(x;y) \in [AB]$, la longueur MN est :

$\ell(x) = MN = h(x) - f(x)$ car C_h au-dessus de C_f

$= -\left(x - \frac{9}{40}\right)^2 + \frac{1681}{1600}$ (d'après géogebra)

Il s'agit de la forme canonique et on a le tableau de variations :

x		$9/40$	
$\ell(x)$	$\nearrow$	$\frac{1681}{1600}$	$\searrow$

↳ La longueur maximale est atteinte pour $x = \frac{9}{40} = 0,225$ et vaut $\frac{1681}{1600} \approx 1,05$