DS N°14

I **1.** $f_1(x) = \dfrac{x}{2+\cos x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{-x}{2+\cos(-x)}$

$= -\dfrac{x}{2+\cos x}$ car $\cos(-x) = \cos x$

$= -f_1(x)$

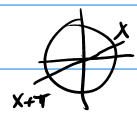
Donc la fonction f_1 est impaire

2. $f_2(x) = \cos x \, \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f_2(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)\sin^2\left(\frac{1}{2}(x+2\pi)\right)$

$= \cos x \, \sin^2\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ car $\cos(x+2\pi) = \cos x$

$= \cos x \left(-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2$ car $\sin(X+\pi) = -\sin X$



$= \cos x \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$= f_2(x)$

Donc f_2 est de période 2π

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(-x) = \cos(-x) \cdot \left(\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)^2$

$= \cos x \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2$

$= \cos x \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$= f_2(x)$

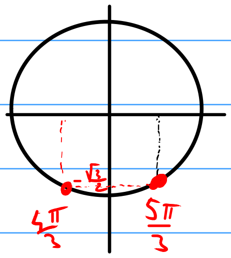
Donc f_2 est paire.

II $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; $1 + \tan^2 x = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

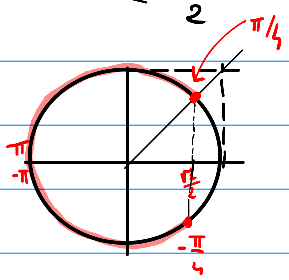
$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$; L'égalité est vérifiée.

III $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$S = \left\{ \frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$

$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \left[-\pi ; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} ; \pi \right]$

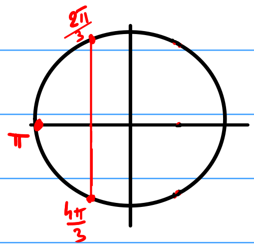
IV $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \quad (E)$

On pose $X = \cos x$; alors $(E) \Leftrightarrow 2X^2 + 3X + 1 = 0$

$\Delta = 1$ donc $X = \frac{-3+1}{4} = \frac{-1}{2}$

ou $X = -1$

Donc $(E) \Leftrightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$ ou $\cos x = -1$



Donc $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} ; \pi \right\}$

V **1** $f(x) = (1 - \sin x)\cos x$

a On dérive f comme un produit :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1-\sin x)' \cos x + (1-\sin x)(\cos x)'$

$= -\cos x . \cos x + (1 - \sin x)(-\sin x)$

$= -\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x$

b On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $-\cos^2 x = \sin^2 x - 1$

Donc $f'(x) = \sin^2 x - 1 - \sin x + \sin^2 x$

$= 2\sin^2 x - \sin x - 1$

et d'autre part : $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 2\sin^2 x - 2\sin x + \sin x - 1$

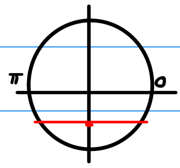
$= 2\sin^2 x - \sin x - 1$

Donc on a bien $f'(x) = (2\sin x + 1)(\sin x - 1)$

2a Résolut° de $2\sin x+1>0$ sur $[0,\pi]$:

$$2\sin x+1>0 \iff \sin x > -\frac{1}{2}$$

et ceci est vrai sur $[0,\pi]$



De même, on sait que $\sin x \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

donc $\sin x - 1 \leq 0$ sur $[0,\pi]$ avec $\sin x - 1 = 0$ en $x=\frac{\pi}{2}$

b On déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\pi/2$		π
$2\sin x+1$		$+$		$+$	
$\sin x-1$		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\searrow$	-1