

DS n° 12 : Test sur les suites (1h)

I (13 points)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes. La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
 - a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, un seul permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année 2013 + n . Lequel ?

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début : Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0,6 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin	Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début : Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire Affecter 115 à U $0,4 \times U + 115$ à U Fin Pour Afficher U Fin	Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Début : Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0,4 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin

- b) Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4.
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression explicite de la suite (u_n) .
 - d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - e) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
 - f) Comment transformer l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 199,99$.
 A l'aide de la calculatrice, déterminer cet entier n .
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier. Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

II (7 points) Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On suppose que pour tout entier n , on a $u_n \neq 0$, et on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.
 - a) Montrer en explicitant les calculs que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2$.
 - b) En déduire que la suite (v_n) est arithmétique.
 - c) Donner l'expression de v_n en fonction de n , et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.