

DS n° 12 : Exponentielle III (1h)

I (5 points)

1. Soit g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -xe^x - 1$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -e^x(1+x)$$

b) Etudier le signe de g' et dresser le tableau de variations de g . On pourra compléter avec les limites suivantes si vous le souhaitez :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1.$$

c) En déduire le signe de g sur \mathbb{R} .

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$.

a) Déterminer la dérivée de f et montrer que f' et g ont même signe.

b) En déduire le tableau de variation de f qu'on complètera avec les limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

II (3 points) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

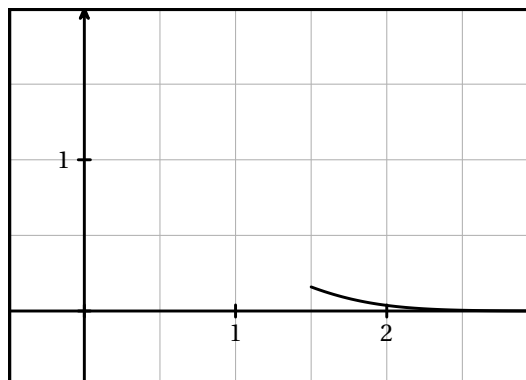
$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.

1. Dresser le tableau de variations de f et démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente en 0 ?

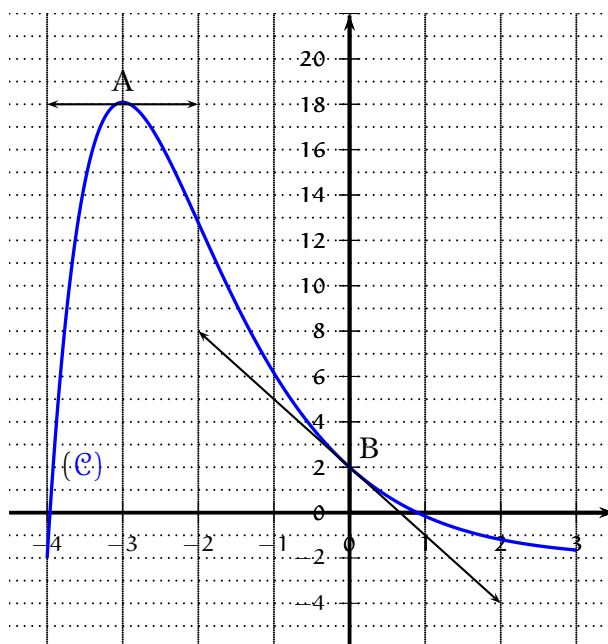
3. Compléter le graphe de la figure ci-dessous.



III (2 points)

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B(0 ; 2) sont sur la courbe (C).

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe (C) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f .



1. Par lecture graphique, déterminer :

- $f'(-3)$;
- $f(0)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4 ; 3]$ par

$$f(x) = a + (x + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4 ; 3]$.
- À l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$$

c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b et donner l'expression de f .

IV On donne :

$$S_n = 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e$$

1. Déterminez S_n en fonction de n .

2. Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.