

DS N°8

I 1 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$

On a $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 0 + 1$
 $= \frac{7}{4}$

et $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} + 1$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + \frac{16}{16}$
 $= \frac{41}{16}$

2a La formule dans B3 est $= 0,75 * B2 + 0,25 * A2 + 1$

2b D'après le tableau, (u_n) semble être croissante.

3 $\forall m \in \mathbb{N}, v_m = u_m - m.$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, v_{m+1} = u_{m+1} - (m+1)$
 $= \frac{3}{4}u_m + \frac{1}{4}m + 1 - (m+1)$
 $= \frac{3}{4}u_m - \frac{3}{4}m$
 $= \frac{3}{4}(u_m - m)$
 $= \frac{3}{4}v_m$

Ainsi, (v_m) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ avec $v_0 = u_0 - 0 = 1$

3b Alors $\forall m \in \mathbb{N}, v_m = v_0 q^m$
 $= 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^m$

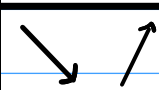
Et donc $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = m + v_m$ et donc $u_n = n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3c On a $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

II. 1 $\forall m \in \mathbb{N}, P_m = m^2 - 42m + 4$

Un rapide calcul de tête nous donne à voir le TV:

En particulier on va avoir $P_{22} > P_{21}$

x	21
$P(x)$	

En effet: $P_{21} = -437$; $P_{22} = -436$ et donc (P_m) n'est pas décroissante

L'affirmation est fausse

2 Un petit tableau à la calculatrice semble nous indiquer que (u_n) géométrique

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= u_n^2 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3} \sqrt{u_n^2 + 8}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{9} (u_n^2 + 8) - 1 \\ &= \frac{1}{9} u_n^2 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9} (u_n^2 - 1) \\ &= \frac{1}{9} u_n.\end{aligned}$$

donc (u_n) est bien géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$