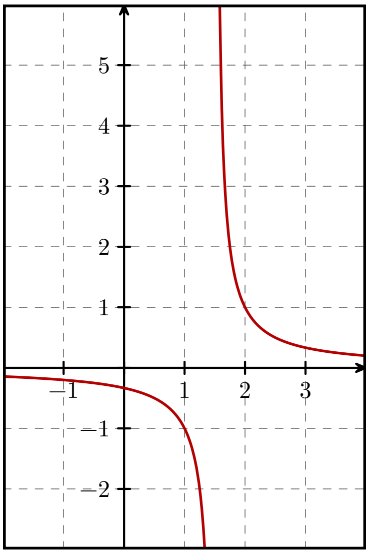
DS N° 3 : Degré 2 (15 min)

I



Soit $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

1. f est elle dérivable en 1 ? Si oui préciser $f'(1)$ ainsi que l'équation T_1 de la tangente en $a = 1$. Représentez-là sur le graphique.
2. Et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. f est elle dérivable en x ? Si oui préciser $f'(x)$.

Correction :

1. Pour $h \neq 0$, soit t le taux d'accroissement de la fonction en 1. On a :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2(1+h)-3} - (-1)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2h-1} + 1\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1+2h-1}{2h-1}\right) \\ &= \frac{2}{2h-1} \end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -2 \in \mathbb{R}$.
Il s'ensuit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -2$.
La tangente en 1 a pour équation :

$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Ici $f'(1) = -2$; $f(1) = -1$ donc :

$$T : y = -2x + 1$$

2. Généralisation pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. Soit t le taux en x, on a alors pour $h \neq 0$:

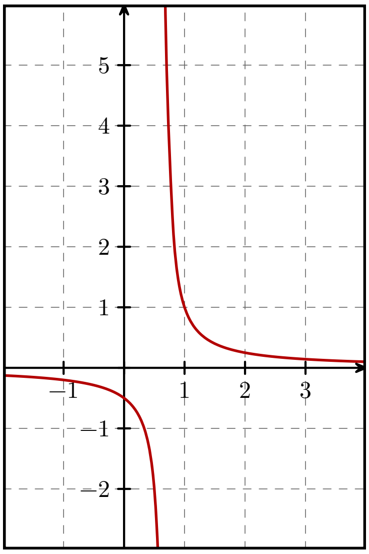
$$\begin{aligned}
t(h) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2(x+h)-3}-\frac{1}{2x-3}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2x+2h-3}-\frac{1}{2x-3}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{2x-3-(2x+2h-3)}{(2x+2h-3)(2x-3)}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{-2h}{(2x+2h-3)(2x-3)}\right) \\
&= \frac{-2}{(2x+2h-3)(2x-3)}
\end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = \dfrac{-2}{(2x-3)^2} \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit que f est dérivable en x et que $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x-3)^2}$.

DS N° 3 : Degré 2 (15 min)

I



Soit $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

1. f est elle dérivable en 1 ? Si oui préciser $f'(1)$ ainsi que l'équation T_1 de la tangente en $a = 1$. Représentez-là sur le graphique.
2. Et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. f est elle dérivable en x ? Si oui préciser $f'(x)$.

Correction :

1. Pour $h \neq 0$, soit t le taux d'accroissement de la fonction en 1. On a :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3(1+h)-2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3h+1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1-(3h+1)}{3h+1}\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{-3h}{3h+1}\right) \\ &= \frac{-3}{3h+1} \end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -3 \in \mathbb{R}$.
Il s'ensuit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -3$.
La tangente en 1 a pour équation :

$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Ici $f'(1) = -3$; $f(1) = 1$ donc :

$$T : y = -3x + 4$$

2. Généralisation pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. Soit t le taux en x, on a alors pour $h \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
t(h) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3(x+h)-2} - \frac{1}{3x-2}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3x+3h-2} - \frac{1}{3x-2}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{3x-2-(3x+3h-2)}{(3x+3h-2)(3x-2)}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{-3h}{(3x+3h-2)(3x-2)}\right) \\
&= \frac{-3}{(3x+3h-2)(3x-2)}
\end{aligned}
$$

Alors $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = \dfrac{-3}{(3x-2)^2} \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit que f est dérivable en x et que $f'(x) = \dfrac{-3}{(3x-2)^2}$.