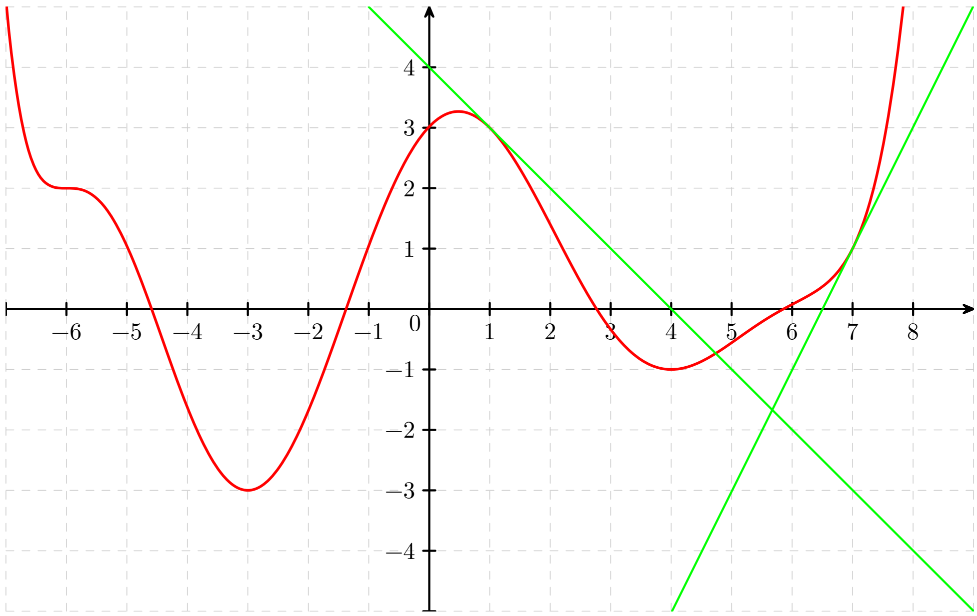
DS N°5 : Autour de la dérivation (1h50)

I **(3 points)** La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites tracées sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}$.



1. Déterminer, par lecture graphique, $f'(1)$ et $f'(7)$.

Correction :

On a par lecture graphique des coefficients directeur des droites : $f'(1) = -1$ et $f'(7) = 2$.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$. Expliquer.

Correction :

Le nombre dérivé $f'(x)$ est nul lorsque la tangente est horizontale, c'est-à-dire en $-6, -3, \frac{1}{2}, 4$ (environ).

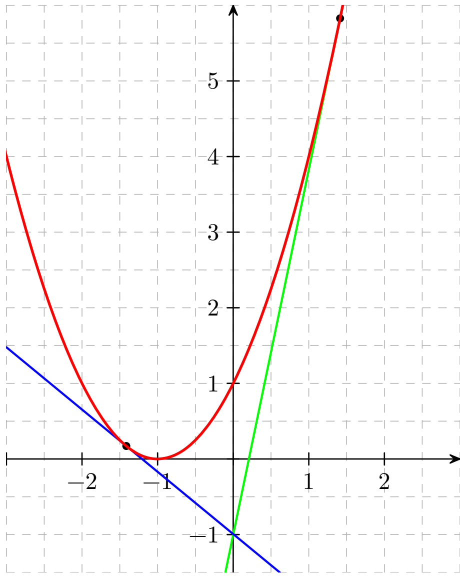
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

Correction :

Les variations de f donne le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		-6		-3		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(II) (3 points)



Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. On donne le graphe ci-contre.
Soit $A(0; -1)$

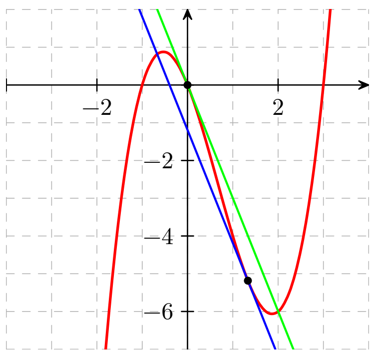
1. Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a satisfait :
$$\mathcal{T}_a : y = (2a + 2)x - a^2 + 1$$
3. Déduire et donner l'équation des tangentes passant par A.

Correction :

1. Par lecture graphique, on voit deux points de contact depuis A.
Il existe deux tangentes.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2$.
L'équation de la tangente satisfait :
$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
Ici, on a donc :
$$\mathcal{T}_a : y = (2a + 2)(x - a) + a^2 + 2a + 1$$
Et donc en arrangeant :
$$\mathcal{T}_a : y = (2a + 2)x - a^2 + 1$$
3.
$$\begin{aligned} A(0; -1) \in \mathcal{T}_a &\iff -a^2 + 1 = -1 \\ &\iff a^2 = 2 \\ &\iff a = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{2} \end{aligned}$$
Les équations des tangentes sont alors :
$$y = (2\sqrt{2} + 2)x - 1 \quad \text{et} \quad y = (-2\sqrt{2} + 2)x - 1$$

(III) (4 points)

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ définie $\mathbb{R}$.



1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f. *Vous ne donnerez pas la valeur exacte des extremums locaux mais une valeur approchée à* 10^{-2}.
3. On a représenté f sur le graphe ci-contre.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 puis tracez-la.
   (b) Il semble qu'il existe une autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $\mathcal{T}$. Déterminer son équation ainsi que son point de contact.

Correction :

1. On a pour $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

.

$f'(x)$ est une expression de degré 2, cherchons son signe :

$\Delta = 52 = (2\sqrt{13})^2$, et les racines sont $x_1 = \dfrac{1}{6}(4 + 2\sqrt{13}) = \dfrac{1}{3}(2 + \sqrt{13}) \approx 1,87$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}(2 - \sqrt{13}) \approx -0,54$.

On déduit donc le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		≈ -0.87		≈ 1.54		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	≈ 0.88	$\searrow$	≈ -6.06	$\nearrow$	

2. Voir question précédente.
3. (a) Par propriété, la tangente a pour équation : $\mathcal{T} : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
   Ici, $f(0) = 0$, $f'(0) = -3$.
   Donc
   $$\mathcal{T} : y = -3x$$
   .

   (b) On cherche une tangente parallèle à $\mathcal{T}$, soit a l'abscisse du point de contact et $\mathcal{T}_a$ cette nouvelle tangente.
   On a :
   $$\begin{aligned}
   \mathcal{T}_a \text{ parallèle à } \mathcal{T} &\iff \mathcal{T}_a \text{ et } \mathcal{T} \text{ ont même coefficient directeur} \\
   &\iff f'(a) = -3 \\
   &\iff 3a^2 - 4a - 3 = -3 \\
   &\iff 3a^2 - 4a = 0 \\
   &\iff a(3a - 4) = 0 \\
   &\iff a = 0 \text{ ou } a = \frac{4}{3}
   \end{aligned}$$

   $a = 0$ correspond à $\mathcal{T}$ et $a = \dfrac{4}{3}$ correspond à la nouvelle tangente.

   Son équation est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Avec $a = \dfrac{4}{3}$, $f'(a) = -3$ et
   $f(a) = (\dfrac{4}{3})^3 - 2(\dfrac{4}{3})^2 - 3\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{27}(64 - 32.3 - 4.27) = -\dfrac{140}{27}$.
   Alors $y = -3(x - \dfrac{4}{3}) - \dfrac{140}{27}$ ce qui nous donne :
   $$\mathcal{T}_{\frac{4}{3}} : y = -3x - \frac{32}{27}$$
   On peut observer que ceci est cohérent avec le dessin.

IV **(4 points)** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $D =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

On admet que f est dérivable sur D.

1. Après avoir calculer la dérivée de f, dresser le tableau de variations de f sur D.
2. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ en $x = 1$.
3. Résoudre $f(x) = 2x$.
4. Représenter la tangente $\mathcal{T}$, calculer $f(3), f(4)$ et compléter le graphe de f dans le repère suivant.

Correction :

1. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$. On cherche le signe de $f'(x)$ et pour cela on résout :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 1 - \frac{2}{x^2} > 0 \\ &\iff \frac{2}{x^2} < 1 \\ &\iff \frac{x^2}{2} < 1 \qquad \text{(Par application de la fonction inverse qui décroissante sur } D\text{)} \\ &\iff x^2 < 2 \\ &\iff x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\qquad \text{(La fonction carré est une fonction de référence)} \end{aligned}$$

On déduit alors le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$2\sqrt{2}$	↗	

On a calculé ici $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

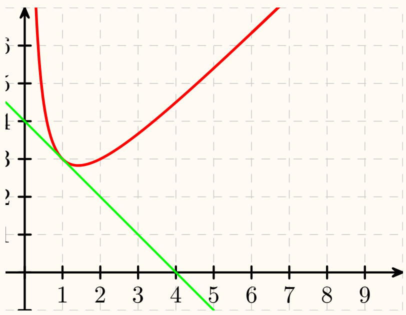
2. Par propriété, la tangente a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Ici, $f(1) = 3$ et $f'(1) = -1$ donc $\mathcal{T} : y = -(x-1) + 3$.

$$\mathcal{T} : y = -x + 4$$

3.

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{x} = 2x &\iff x^2 = 2 \\ &\iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ (refusée car } x > 0). \end{aligned}$$

4. $f(3) = \frac{11}{3} \approx 3,6666$; $f(4) = 4,5$ et ceci permet de compléter le graphe.



Remarque 1. Pour avoir le signe de $f'(x)$, on peut aussi constater que $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$ et faire un tableau de signe.

V **(4 points)**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).
2. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 9 - x^2$ dont une représentation est donnée ci-contre.

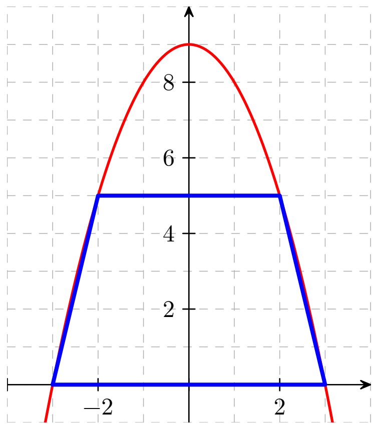
   On note $A(-3; 0), B(3; 0)$ et pour $x \in]0, 3[$ on note M et N les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$. On considère le trapèze $ABMN$.

   (a) Complétez la figure avec $x = 2$.

   (b) *Rappel : Aire du trapèze* $= \dfrac{\textit{(petite base + grande base)} \times \textit{hauteur}}{2}$.

   Désormais $x \in]0, 3[$, déterminer l'expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ du trapèze $ABMN$ en fonction de x.

   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale. Quelle est alors cette aire ?



Correction :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - 6x + 9 \\ &= -3(x^2 + 2x - 3) \\ &= -3(x+3)(x-1) \qquad \text{(car 1 est racine évidente)} \end{aligned}$$

On déduit donc le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$		
f		↘	0	↗	27	↗	32	↘	0	↘	

Où on a calculé : $f(-3) = 0$ et $f(1) = 33$.

2. La longueur des bases du trapèze sont donc $L = 6$ et $\ell = 2x$, la hauteur est $9 - x^2$ (le trapèze est dans la parabole). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \frac{(6+2x)(9-x^2)}{2} \\ &= 27 + 9x - 3x^2 - x^3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Alors sachant que $x \in [0; 3]$, on observe à l'aide du tableau de variation de f que l'aire est minimale pour $x = 3$ et maximale pour $x = 1$. Elle vaut alors $32u.a.$