# DS N°6 : Étude de fonctions et probabilités conditionnelles (1h30)

**I** **(1 point)** Soient deux événements $A$ et $B$ tels que :

$$p(A) = 0,4 \quad \text{et} \quad p(B) = 0,3.$$

1. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que $A$ et $B$ sont **indépendants**.

**Correction :**

Pour des événements indépendants on a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

et par propriété :

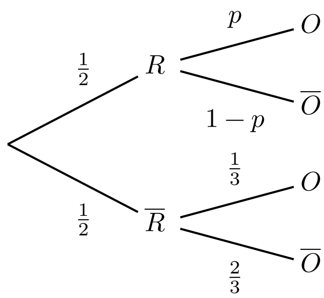
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$$

**II** **(4 points)** Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathcal{P})$ suivant :
On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

➛ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
➛ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
➛ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

1. *Calculs de probabilités*
   On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole $(\mathcal{P})$.
   On note : $R$ l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
   $O$ l'évènement « le jeune a répondu Oui ».
   Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :




**Correction :**

L'arbre complété est le suivant :
- $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (3 faces paires sur 6)
- $P(\overline{R}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- Sachant $R$ : le jeune répond sincèrement donc $P_R(O) = p$ et $P_R(\overline{O}) = 1 - p$
- Sachant $\overline{R}$ :
  - Si dé = 1 : répond "Oui" (probabilité $\frac{1}{6}$ parmi $\overline{R}$)
  - Si dé = 3 ou 5 : répond "Non" (probabilité $\frac{2}{6}$ parmi $\overline{R}$)
  - Donc $P_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{R}}(\overline{O}) = \frac{2}{3}$

2. En déduire que la probabilité $q = p(O)$ de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

**Correction :**

$R$, $\overline{R}$ partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} q = P(O) &= P(R \cap O) + P(\overline{R} \cap O) \\ &= P(R) \times P_R(O) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(O) \\ &= \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole $(\mathcal{P})$. Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Que peut-on en conclure sur la proportion $p$ de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

**Correction :**

La fréquence observée est : $q = \frac{625}{1500} \approx 0,4167$.
D'après la formule $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$, on a :

$$\begin{aligned} q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} &\iff \frac{1}{2}p = q - \frac{1}{6} \\ &\iff p = 2q - \frac{1}{3} \\ &\iff p = 2\frac{625}{1500} - \frac{1}{3} \\ &\iff p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut estimer que la proportion $p$ de jeunes pratiquant le téléchargement illégal au moins une fois par semaine est de $\dfrac{1}{2}$.

**III** **(5 points)** Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.
Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- $F$ : « le salarié interrogé est une femme »,
- $S$ : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements $F$ et $S$.

1. Donner la probabilité de l'évènement $S$.

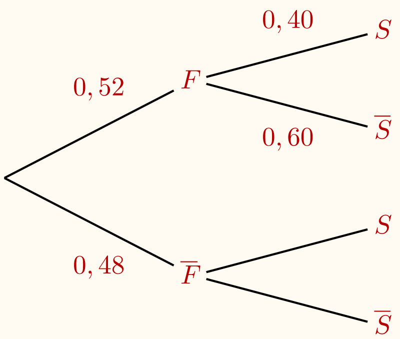
**Correction :**

D'après l'énoncé : $P(S) = 0,25$

2. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.

**Correction :**

D'après les données de l'énoncé et la loi des noeuds :




3. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.

**Correction :**

$$\begin{aligned} P(F\cap S) &= P(F)\times P(S|F) \\ &= 0,52\times 0,40 \\ &= 0,208 \end{aligned}$$

4. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

**Correction :**

On cherche $P(F|S)$ :

$$\begin{aligned} P_S(F) &= \frac{P(F\cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,208}{0,25} \\ &= 0,832 \end{aligned}$$

La probabilité est de 0,832.

5. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

**Correction :**

On cherche $P_{\overline{F}}(S)$ :
D'abord, $F$, $\overline{F}$ partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(F\cap S) + P(\overline{F}\cap S)$ et donc $P(\overline{F}\cap S) = P(S) - P(F\cap S)$.
Ensuite :

$$\begin{aligned} P_{\overline{F}}(S) &= \frac{P(\overline{F}\cap S)}{P(\overline{F})} \\ &= \frac{P(S)-P(F\cap S)}{P(\overline{F})} \\ &= \frac{0,25-0,208}{0,48} \\ &\approx 0,0875 \end{aligned}$$

$0,0875 < 0,10$, donc moins de 10% des hommes ont suivi le stage. L'affirmation du directeur est justifiée.

## IV (10 points)

Soit la fonction $f$ définie sur $D = ]1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x^2+4x-7}{x-1}$$

$\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour $x \in D$ : $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}$.

**Correction :**

Pour $x \in D$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x-7)\times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4x-4+x^2-4x+7}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

**Correction :**

Le dénominateur $(x-1)^2 > 0$ pour $x \in D$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $N(x) = -x^2+2x+3$ qui est une expression de degré 2.
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16$ donc $N$ admet deux racines :
$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$
On obtient donc le signe de $f'$ et le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | ‖ | ↗ | $-2$ | ↘ | |

Avec $f(3) = \frac{-9+12-7}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$

3. (a) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

**Correction :**

On a $\mathcal{T} : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

Avec $f(2) = \frac{-4+8-7}{2-1} = \frac{-3}{1} = -3$ et $f'(2) = \frac{-4+4+3}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} = 3$

Donc : $\mathcal{T} : y = 3(x-2) - 3 = 3x - 6 - 3 = 3x - 9$

$$\mathcal{T} : y = 3x - 9$$

(b) Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur égal à $-1$ ? Si oui, précisez seulement le point de contact.

**Correction :**

On cherche $x$ tel que $f'(x) = -1$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) = -1 &\iff \frac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2} = -1 \\ &\iff -x^2+2x+3 = -(x-1)^2 \qquad \text{(car } (x-1) \neq 0 \text{ sur } D\text{)} \\ &\iff -x^2+2x+3 = -x^2+2x-1 \\ &\iff 3 = -1 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.
Donc il n'existe pas de tangente de coefficient directeur $-1$.

4. (a) Montrer que $f(x) = -x + 3 - \dfrac{4}{x-1}$.

**Correction :**

On a pour $x > 1$ :

$$\begin{aligned} -x + 3 - \frac{4}{x-1} &= \frac{(x-1)(-x+3) - 4}{x-1} \\ &= \frac{-x^2 + 4x - 7}{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

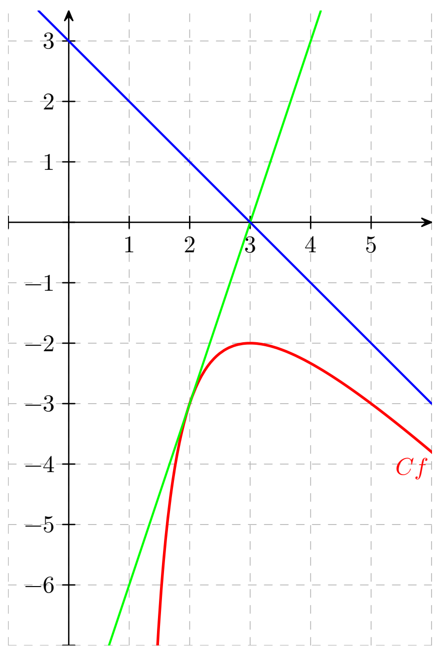
(b) Soit $\Delta$, la droite d'équation $y = -x + 3$.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$.

**Correction :**

La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$ est donnée par le signe de $d(x) = f(x) - (-x+3) = -\dfrac{4}{x-1}$
Pour $x \in ]1; +\infty[$ :

- $x - 1 > 0$, donc $-\frac{4}{x-1} < 0$

Donc $d(x) < 0$ pour tout $x \in D$ et ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de la droite $\Delta$ sur $D$.




**V✶** Quel est le maximum de $q(x, y) = xy^2$ sachant que $x \geq 0$ et $x + y = 20$ ?

**Correction :**

On a $x + y = 20$ ainsi $y = 20 - x$ et donc on a $q(x, y) = x(20-x)^2$.
Nous devons donc maximiser $f(x) = x(20-x)^2$ pour $x \geq 0$.
On a $f(x) = x(400 - 40x + x^2) = x^3 - 40x^2 + 400x$ et donc pour $x \in \mathbb{R}$ :

$f'(x) = 3x^2 - 80x + 400$ qui est un polynôme de degré 2 avec $a = 3 > 0$.

$\Delta = (-80)^2 - 4 \times 3 \times 400 = 1600$ et $\sqrt{\Delta} = 40$.

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{80 - 40}{6} = \frac{20}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{80 + 40}{6} = 20$$

On déduit alors le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{20}{3}$ | | $20$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $f(\frac{20}{3})$ | $\searrow$ | $f(20)$ | $\nearrow$ | |

Donc le maximum chercher est atteint en $x = \frac{20}{3}$ et vaut $f(\frac{20}{3}) = \dfrac{32000}{27} \approx 1185$