

DS N°6 : Etude de fonctions et probabilités conditionnelles

I (1 point) Soient deux événements A et B tels que :

$$p(A) = 0,4 \quad \text{et} \quad p(B) = 0,3.$$

1. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ sachant que A et B sont **indépendants**.

II (4 points)

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (\mathcal{P}) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.

Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. C'est cette valeur qui nous intéresse in fine.

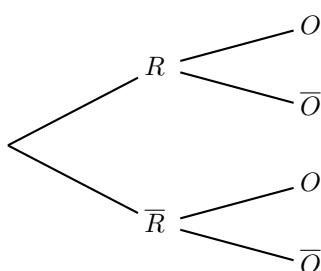
1. *Calculs de probabilités*

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (\mathcal{P}).

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. En déduire que la probabilité $q = p(O)$ de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

3. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (\mathcal{P}). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

(III) (5 points)

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

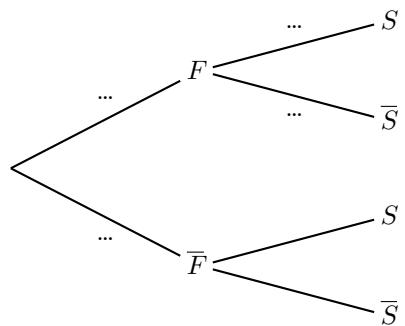
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

\bar{F} et \bar{S} désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S .

1. Donner la probabilité de l'évènement S .
2. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
3. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.
4. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
5. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.

Justifier l'affirmation du directeur.

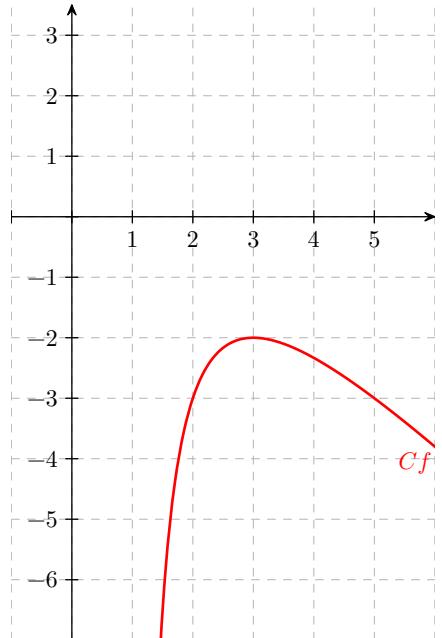
**(IV) (10 points)**

Soit la fonction f définie sur $D =]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}$$

\mathcal{C}_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour $x \in D$: $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^2}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
 (b) Existe-t-il une tangente à \mathcal{C}_f de coefficient directeur égal à -1 ? Si oui, précisez seulement le point de contact.
4. (a) Montrer que $f(x) = -x + 3 - \frac{4}{x - 1}$.
 (b) Soit Δ , la droite d'équation $y = -x + 3$.
 Etudier la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
5. Tracer \mathcal{T} et Δ dans le graphique ci-dessous, et contrôler les résultats.



- V*** Quel est le maximum de $q(x, y) = xy^2$ sachant que $x \geq 0$ et $x + y = 20$?