

DS N°2 : Degré 2 (le retour) (1h15)

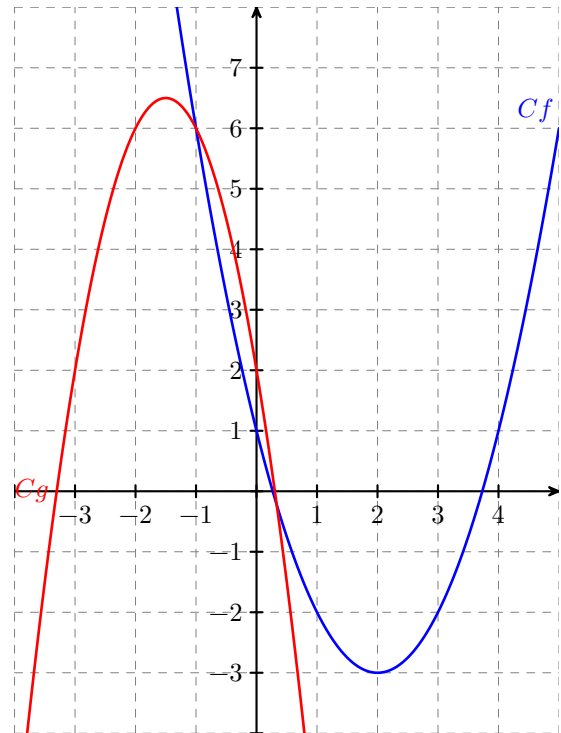
I (5 points)

On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ et } g(x) = -2x^2 - 6x + 2$$

La courbe représentative de g est la courbe tracée sur le graphique ci-contre.

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(b) Représentez la courbe $\mathcal{C}_f$ de f sur le graphique.
2. (a) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
(b) On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Précisez leur coordonnées.
(c) Ces résultats sont-ils cohérents avec le graphique ?
(d) **(bonus)** Déterminer la longueur AB .



Correction :

1. (a) f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1 > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut.

Le sommet $S(\alpha; \beta)$ vérifie :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3.$$

On peut alors dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↙	-3	↘

- (b) R.A.S. (voir le graphique : $\mathcal{C}_f$ est la parabole tournée vers le haut, de sommet $S(2; -3)$ et passant par exemple par $(0; 1)$ et $(4; 1)$).
2. (a) La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est donnée par le signe de la différence :

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 - 4x + 1 - (-2x^2 - 6x + 2) \\ &= 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$, donc d admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{1}{3}.$$

Comme $a = 3 > 0$, on peut dresser le tableau de signes de d :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$d(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Et on peut donc conclure que :

- Sur $] -\infty; -1[\cup] \frac{1}{3}; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Sur $] -1; \frac{1}{3}[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

(b) Les points d'intersection vérifient $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $d(x) = 0$, donc $x = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$.

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = -\frac{2}{9}$$

Ainsi

$$A(-1; 6) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{9}\right)$$

(c) Ces résultats sont cohérents avec le graphique : les deux paraboles se coupent bien en deux points, l'un à gauche de l'axe des ordonnées et assez haut ($A(-1; 6)$), l'autre juste à droite de l'origine et légèrement sous l'axe des abscisses ($B(\frac{1}{3}; -\frac{2}{9})$).

(d) **(bonus)** On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - (-1) \\ \frac{2}{9} - 6 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{56}{9} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{56}{9}\right)^2 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{3136}{81} \\ &= \frac{144}{81} + \frac{3136}{81} \\ &= \frac{3280}{81} \end{aligned}$$

Donc

$$AB = \frac{\sqrt{3280}}{9} = \frac{4\sqrt{205}}{9} \approx 6,36$$

II (5 points) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \frac{2x^2 - 4x - 2}{x + 1} \leq 1$$

Correction :

$$\begin{aligned}
(E_1) &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 2}{x + 1} - 1 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 2 - (x + 1)}{x + 1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x - 3}{x + 1} \leq 0
\end{aligned}$$

Notons $N(x) = 2x^2 - 5x - 3$ le numérateur et étudions son signe :

On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$, donc N admet deux racines :

$$x_1 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + 7}{4} = 3.$$

Comme $a = 2 > 0$, on peut dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$N(x)$		+		+	0	-	0	+	
$x + 1$		-	0	+		+		+	
$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x + 1}$		-		+	0	-	0	+	

Et donc on a :

$$\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$$

$$(E_2) : x - 5\sqrt{x} - 36 = 0 \quad (\text{vous pouvez poser } X = \sqrt{x})$$

Correction :

On pose $X = \sqrt{x}$ avec $X \geq 0$, donc $x = X^2$. L'équation devient :

$$X^2 - 5X - 36 = 0.$$

On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$, donc :

$$X = \frac{5 + 13}{2} = 9 \quad \text{ou} \quad X = \frac{5 - 13}{2} = -4.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \text{ ou } \sqrt{x} = -4 \quad (\text{impossible}) \\
&\Leftrightarrow x = 81
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{81\}$$

III (5 points) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

1. Montrer que 2 est une racine de P .
2. Déterminer alors les réels a , b et c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Correction :

1. On calcule :

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 16 - 20 + 4 = 0.$$

Donc 2 est bien une racine de P .

2. On développe :

$$(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$$

Par identification avec $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 + 2a = -5 + 4 = -1 \\ c = 1 + 2b = 1 - 2 = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -1$$

et donc

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 1).$$

3. On résout $P(x) = 0$, c'est-à-dire $(x - 2)(2x^2 - x - 1) = 0$.

- $x - 2 = 0 \iff x = 2$.
- $2x^2 - x - 1 = 0$: on a $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$, donc

$$x = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + 3}{4} = 1.$$

Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}; 1; 2 \right\}$$

IV (5 points) Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E_m) : x^2 - mx + 3 - m = 0$.
On souhaite déterminer les valeurs de m pour que (E_m) ait deux solutions.

1. Déterminer le discriminant Δ_m de cette équation.
2. Faire le tableau de signe de Δ_m en fonction de m
3. Conclure.

Correction :

1. (E_m) est une équation du second degré avec $a = 1$, $b = -m$ et $c = 3 - m$. Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta_m &= b^2 - 4ac \\ &= (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - m) \\ &= m^2 - 12 + 4m \\ &= m^2 + 4m - 12.\end{aligned}$$

2. $\Delta_m = m^2 + 4m - 12$ est un trinôme en m avec $a = 1 > 0$. On calcule son discriminant :

$$\Delta' = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64.$$

Comme $\Delta' > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$m_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2.$$

Comme $a = 1 > 0$, on peut dresser le tableau de signes de Δ_m :

m	$-\infty$	-6	2	$+\infty$	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$

3. (E_m) admet deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta_m > 0$, c'est-à-dire $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$