

Prueba 1

$$\textcircled{I} \quad S \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 4x + 6y + 2z = 12 \end{cases}$$

Usamos el metodo de Gauss:

$$S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 6 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ x = 11 - 5\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 - 3\lambda - 2x = 6 - 3\lambda - 2(11 - 5\lambda) \\ \quad = -16 + 7\lambda \end{cases}$$

Por lo tanto el sistema es compatible indeterminado de soluciones

$$(11-5\lambda, \lambda, -16+7\lambda); \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad S \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 16 \\ x + y - 2z = -5 \\ 3x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Usando el método de Gauss tenemos

$$S \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & a & 3 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 16 \\ -1 & 0 & -5 & -21 \\ -1 & 0 & a-6 & -29 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 16 \\ -1 & 0 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & a-1 & -8 \end{array} \right) L_3 - L_2$$

$$L_3 \Rightarrow (a-1)z = -8$$

Caso 1: Si $a \neq 1$ entonces el sistema es compatible determinado:

$$z = \frac{-8}{a-1}; \quad L_2 \Rightarrow -x = -21 + 5z \\ = -21 - \frac{40}{a-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-21(a-1) + 40}{a-1} = \frac{1}{a-1} (21a + 19)$$

$$\begin{aligned}
 y \quad L_1 &\Rightarrow y = 16 - 2x - 3z \\
 &= 16 - 2 \frac{21a+19}{a-1} + 3 \frac{8}{a-1} \\
 &= \frac{1}{a-1} (16a - 16 + 42a - 38 + 24) \\
 &= \frac{1}{a-1} (-26a - 30)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado de soluciones $\frac{1}{a-1} (21a+19; -26a-30; -8)$.

Caso 2: Si $a = 1$; $L_3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.