

Selectividad Blanca - Modelo A

① Sea $A = \begin{pmatrix} -3\lambda & -6 & -9 \\ 2 & -2\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz del sistema

$$\begin{aligned} \det A &= -9\lambda(-4\lambda+4) + 6 \cdot 0 - 9(4-4\lambda) \\ &= 36\lambda^2 - 36 \\ &= 36(\lambda-1)(\lambda+1) = 36(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Caso 1: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, usamos el método de Cramer. Entonces $\det A \neq 0$ y el sistema es compatible determinado.

$$\text{Sea } A_x = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ 0 & -2\lambda & -2 \\ -2\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \det A_x = -2\lambda(12-18\lambda) = -12\lambda(2-3\lambda) = 12\lambda(3\lambda-2)$$

$$\text{Sea } A_y = \begin{pmatrix} -9\lambda & 0 & -9 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2\lambda & 2 \end{pmatrix}; \quad \det A_y = +2\lambda(+18\lambda+18) = +36\lambda(\lambda+1)$$

$$\text{Sea } A_z = \begin{pmatrix} -9\lambda & -6 & 0 \\ 2 & -2\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -2\lambda \end{pmatrix}; \quad \det A_z = -2\lambda(18\lambda^2+12) = -12\lambda(3\lambda^2+2)$$

Entonces el sistema es compatible determinado de soluciones (x, y, z)

$$\begin{aligned} \text{Con } x &= \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\lambda(3\lambda-2)}{3(\lambda-1)(\lambda+1)} \\ y &= \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{+\lambda}{\lambda-1} \\ z &= \frac{-\lambda(3\lambda^2+2)}{3(\lambda-1)(\lambda+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Caso 2: si } \lambda = 1; \quad S_\lambda \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -6 & -9 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -6 & -9 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) L_2 + L_3$$

$L_3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Caso 3: $\lambda = -1$

$$S_{\lambda} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -6 & -9 & | & 0 \\ 2 & 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -6 & -9 & | & 0 \\ 15 & 0 & -15 & | & 0 \\ 3 & 0 & -3 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3L_2 + L_1 \\ 3L_3 + L_1 \end{matrix}$$

y L_2 y L_3 son incompatibles

por lo tanto el sistema es incompatible.

② $f(x) = \ln(2x^2 + 2)$

• $D = \mathbb{R}$ pues $2x^2 + 2 > 0$.

• f es par pues $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Límites

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + 2) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x^2 + 2) = +\infty$.

• Asíntota oblicua.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{pues } x \text{ es infinito de mayor grado que } \ln.$$

pues no hay asíntota oblicua.

Variaciones.

f es derivable y $f'(x) = \frac{4x}{2x^2 + 2} = \frac{2x}{x^2 + 1}$

por lo tanto $f'(x)$ es del signo de x

es decir f creciente sobre $\mathbb{R}_+$ y decreciente sobre $\mathbb{R}_-$

• Convexidad.

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} (x^2+1)^2 - (2x)^2$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos entonces

x	-1	1
$f''(x)$	-	+
f	$\cap$	$\cup$

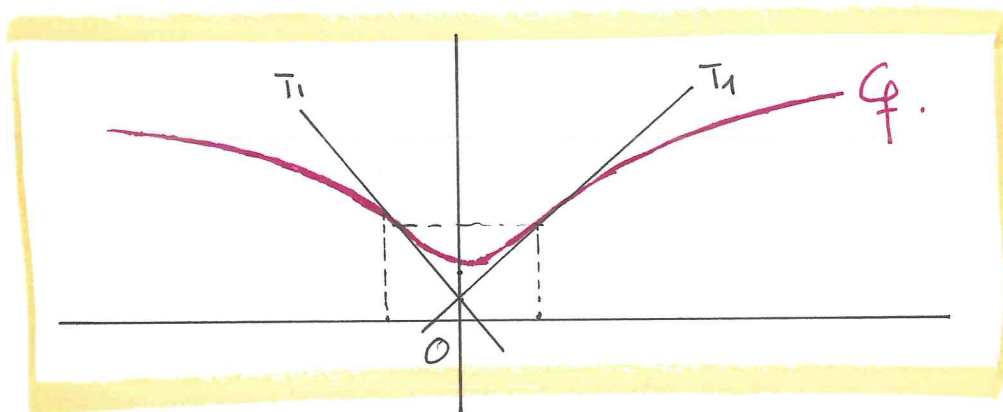
hay 2 puntos de inflexiones: en $x=-1$ y $x=+1$

tangente en 1: $T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\Leftrightarrow y = (x-1) + \ln 4 \Leftrightarrow y = x + 2\ln 2 - 1$$

tangente en -1: $T_{-1}: y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$\Leftrightarrow y = -(x+1) + 2\ln 2 \Leftrightarrow y = -x + 2\ln 2 - 1$$



③ Sea $R(x) = \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x}$; se descompone R

$$= \frac{2x^2+x+8}{x(x^2+4)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\left[x R(x) \right]_{x=0} = 2 = a \quad \text{pues } a=2$$

$$\text{Entonces } \frac{2}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4} = \frac{2x^2+8+bx^2+cx}{x(x^2+4)}$$

y por identificación con R tenemos $2+b=2$ y $c=1$
pues $b=0$; $c=1$

por lo tanto tenemos

$$R(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+4}$$

por lo tanto

$$I = \int \frac{2x^2+x+8}{x^3+4x} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$= 2 \ln|x| + \frac{1}{4} \int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx$$

de la forma $\frac{u'}{1+u^2}$

$$I = 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K. \quad K \text{ constante}$$

④ $\pi \equiv -x + 2y - 3z + 2 = 0$

Sea $\pi' \equiv -x + 2y - 3z + d = 0$ la ecuación de un plano paralelo a π

Sea $A(2, 0, 0) \in \pi$

entonces $\text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(A, \pi')$

$$= \frac{|-2 + d|}{\sqrt{14}}$$

entonces $\text{dist}(\pi, \pi') = 1 \iff |-2 + d| = \sqrt{14}$

$$\iff d - 2 = \sqrt{14} \text{ o } d - 2 = -\sqrt{14}$$

$$\iff d = \sqrt{14} + 2 \text{ o } d = 2 - \sqrt{14}$$

hay dos planos que distan 1 unidad de π :

$$\pi' : -x + 2y - 3z + 2 + \sqrt{14} \quad \text{y} \quad \pi'' : -x + 2y - 3z + 2 - \sqrt{14}$$

selectividad Blanca

Modelo B

$$\textcircled{\text{I}} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & n & \alpha \\ n & \alpha & n+1 \\ \alpha & n+1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= \begin{vmatrix} \alpha & n & \alpha \\ n & \alpha & n+1 \\ \alpha & n+1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ n & \alpha & n+1 \\ \alpha & n+1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_3} \\ &= \begin{vmatrix} n & n+1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = n\alpha - (n+1)\alpha = -\alpha \end{aligned}$$

si $\alpha \neq 0$; $\text{Det } A \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$

si $\alpha = 0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & n+1 \\ 0 & n+1 & 0 \end{pmatrix}$

si $n \neq 0$ entonces $\begin{vmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{vmatrix} = -n^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

si $n = 0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ es un menor distinto de 0
 $\Rightarrow \text{Rango } A = 2$

Al final si $\alpha \neq 0$ $\text{Rango}(A) = 3$ sino $\text{Rango } A = 2$.

$$\textcircled{\text{II}} \quad f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4}$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x-1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x-1)(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

Entonces $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$

por lo tanto el dominio de f es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$.

Sobre Df tenemos ~~que~~ $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-4}$
Límites.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ pues $(x+1)(x-3)$ es infinito de mayor grado que $x-4$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 4} (x+1)(x-3) = 5$.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} x-4 = 0^+ \Rightarrow \lim_{4^+} f = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} x-4 = 0^- \Rightarrow \lim_{4^-} f = -\infty$

Entonces $x=4$ asíntota vertical.

• $\lim_{x \rightarrow 1} f = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$ es una discontinuidad evitable

Asíntota oblicua: $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-4} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-4}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x - 3 & x-4 \\ \hline x^2 - 4x & x+2 \\ \hline 2x - 3 & \\ 2x - 8 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$\text{entonces } \frac{x^2 - 2x - 3}{x-4} = x+2 + \frac{5}{x-4}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+2 + \frac{5}{x-4}$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x-4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x-4} = 0$$

Entonces $\Delta: y = x+2$ es asíntota oblicua a f

Variaciones: Sobre Df: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-4}$ y f derivable

$$\begin{aligned} \text{entonces } f'(x) &= \frac{1}{(x-4)^2} ((x-4)(2x-2) - (x^2 - 2x - 3)) = \frac{1}{(x-4)^2} (2x^2 - 8x - 2x + 8 - x^2 + 2x + 3) \\ &= \frac{1}{(x-4)^2} (x^2 - 8x + 11) \end{aligned}$$

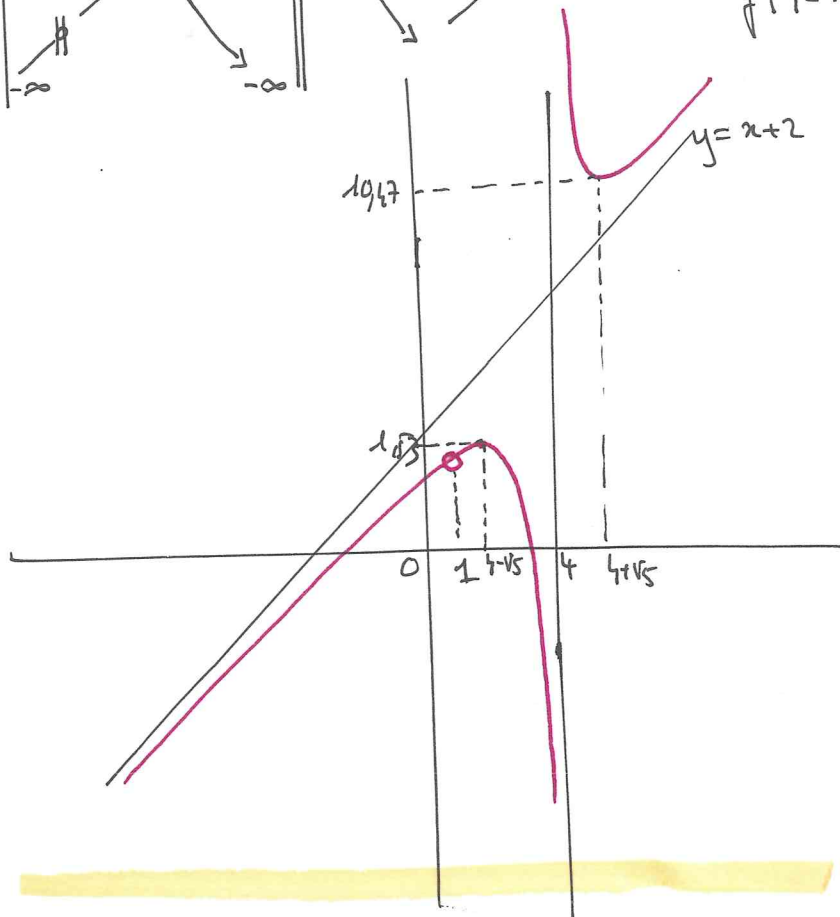
Sea $d(x) = x^2 - 8x + 11$

$\Delta = 64 - 44 = 20 \Rightarrow$ tenemos 2 raíces: $x = 4 - \sqrt{5}$ o $x = 4 + \sqrt{5}$

x	1	$4 - \sqrt{5}$	4	$4 + \sqrt{5}$	
$d(x)$	+	$\emptyset$	-	-	$\emptyset$
$f(x)$					

$f(4 + \sqrt{5}) = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \approx 10,47$

$f(4 - \sqrt{5}) = -2\sqrt{5} + 6 \approx 1,53$



III

Sea $I = \int x^2 \sin(2x) dx$

Integramos 2 veces por partes:

Sea $u = x^2$ $u' = 2x$
 $v' = \sin(2x)$ $v = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$\Rightarrow I = -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \cos 2x dx$

Sea $u = x$ $u' = 1$
 $v' = \cos 2x$ $v = \frac{1}{2} \sin 2x$

$\Rightarrow I = -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$

Entonces

$$I = -\frac{\pi^2}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + K$$

K constante.

W

$$\pi \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0 \\ x + 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ es un vector director de } \pi.$$

es vector normal de π_1 y por lo tanto

$$\pi_1 \equiv -x + 2y + 5z = 0. \quad (\text{pues } 0 \in \pi_1)$$

$$\text{y } \pi_2 \equiv -2x + 3y + z = 0 \quad \text{pues } \pi_2 \neq \pi \text{ y } 0 \in \pi_2 \text{ con } \pi \equiv x + 3y - z + 2 = 0$$

$$\text{Entonces } \Delta = \pi_1 \cap \pi_2$$

$$\Rightarrow \Delta \equiv \begin{cases} -x + 2y + 5z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Buscamos la paramétrica:

$$\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ +9 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ es vector dir de } \Delta$$

además $0 \in \Delta \Rightarrow$

$$\Delta \equiv \begin{cases} x = 13t \\ y = 9t \\ z = 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$