

Devoir n° 6 : Un sujet d'exponentielle (40min)

① On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur \mathbb{R} (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire que $g(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} .

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur \mathbb{R} .

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T .

7. a) Calculer f'' et déterminer la convexité de f et donner les points d'inflexions,

b) Donner une autre démonstration de 6.b