

# DS N°8

(I) ① On a (E) :  $y' + 0,04y = 0,8 \Leftrightarrow y' = -0,04y + 0,8$

On a une équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$

Les solutions sont donc de la forme  $y(t) = Ke^{-0,04t} - \frac{0,8}{-0,04}$

Donc  $y(t) = Ke^{-0,04t} + 20$ .

De plus  $y(0) = 100$  donc  $K + 20 = 100$  donc  $K = 80$

Finalement  $y(t) = 80e^{-0,04t} + 20$

② On cherche à résoudre  $y(t) \leq 37$

$$\Leftrightarrow 80e^{-0,04t} + 20 \leq 37$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,04t} \leq \frac{17}{80}$$

$$\Leftrightarrow -0,04t \leq \ln\left(\frac{17}{80}\right) \quad (\text{Car } \ln \uparrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\ln\left(\frac{17}{80}\right)}{-0,04} \quad (\div -0,04 \text{ avec } -0,04 < 0)$$

On note  $t_0 = -\frac{\ln\left(\frac{17}{80}\right)}{0,04} \approx 38,72 \text{ min} \approx 38 \text{ min et } 43 \text{ secondes}$

Au bout de 38min et 43s le plat fait moins de 37°

II 1a On a  $\mathcal{P}: 3x+y-z-1=0$  et  $(1,3,2)$

$$3x_c + y_c - z_c - 1 = 3+3-2-1 = 3 \neq 0 \text{ donc } \underline{C \notin \mathcal{P}}$$

1b On a  $\mathcal{D}: \begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

$$\text{Soit } M(-t+1; 2t; -t+2) \in \mathcal{D} \text{ alors } 3x_M - y_M - z_M - 1 = 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 \\ = 1 - 2 - 1 \\ = 0$$

Donc  $M \in \mathcal{P}$  donc  $\underline{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}}$

2a le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  est vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  et donc vecteur normal à  $\mathcal{Q}$ .

On déduit  $\mathcal{Q}: -x+2y-z+d=0$  et  $(1,3,2) \in \mathcal{Q}$  donc  $-1+6-2+d=0$  donc  $d=-3$

Ainsi:  $\underline{\mathcal{Q}: -x+2y-z-3=0}$

2b  $\exists (x;y;z) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{D}$  ssi  $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \\ x+2y-z-3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -(-t+1) + 4t + t - 2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t = 6$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \quad \text{Donc } \underline{\mathcal{I}(0;2;1)}$$

2c

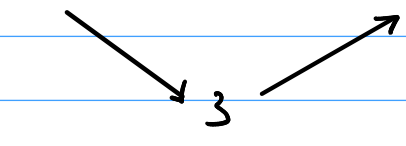
On a  $\vec{CI} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $CI^2 = 3$  et  $\underline{CI = \sqrt{3}}$

3a  $M_t(1-t; 2t; 2-t) \in \mathcal{D}; \vec{CM}_t \begin{pmatrix} -t \\ 2t-3 \\ -t \end{pmatrix}$  donc  $CM_t^2 = t^2 + (2t-3)^2 + t^2 \\ = 6t^2 - 12t + 9$

3b On note  $f(t) = 6t^2 - 12t + 9$ .

Alors  $f'(t) = 12t - 12$

On déduit le tableau de variation de  $f$ :

$t$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$0$	$+$
$f(t)$			

Abs  $f$  admet un minimum en  $t=1$  qui vaut 3  
c'est donc que le minimum de  $CH_t^2$  est 3  
et donc  $CH_t$  admet pour minimum  $\sqrt{3} = CI$

