

Devoir n° 14 : Intégration (1h)

① (6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^e \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^3 xe^{-x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 xe^{2x} dx$$

II (9 points)

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. Montrer que $I_n \geq 0$.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1; e]$, on a :

$$x^2 (\ln x)^{n+1} \leq x^2 (\ln x)^n$$

-
-
- b) En déduire que (I_n) est décroissante.
3. Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

-
-
-
-
5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$