# DS N° 12 : Probabilités (1h)

**I** **(7 points)**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère l'évènement :

— $T_n$ : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n$-ième passage. »
— $P_n$ : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n$-ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement $T_n$.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

**Correction :**

On a d'après les données de l'énoncé :

$$p(T_1) = \frac{1}{2}, p(P_1) = \frac{1}{2}, p_{T_1}(T_2) = 0,3, p_{P_1}(T_2) = 0,2$$

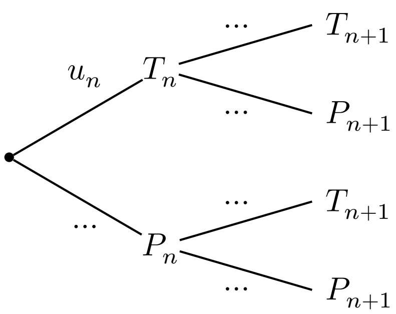
(b) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

**Correction :**

$T_1$, $P_1$, partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) = \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,2 = 0,25 = \frac{1}{4}$$

(c) Recopier et compléter l'arbre suivant :




(d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

**Correction :**

Comme précédemment : $T_n$, $P_n$, partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T_{n+1}) &= p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1-u_n) \times 0,2 \\ &= 0,1u_n + 0,2 \end{aligned}$$

2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

(a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. Préciser raison premier terme.

**Correction :**

On a pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} \\ &= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\ &= 0,1(u_n + 2 - \frac{20}{9}) \\ &= 0,1(u_n - \frac{2}{9}) \\ &= 0,1v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

(b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Correction :**

Par propriété, on déduit pour $n \geqslant 1$ :

$$v_n = v_1 q^{n-1} = v_1 \times 0,1^{n-1} = \frac{5}{18} 0,1^{n-1}$$

Donc $u_n = v_n + \frac{2}{9}$ et donc :

$$u_n = v_n + \frac{2}{9} = \frac{5}{18} 0,1^{n-1} + \frac{2}{9}$$

(c) Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

**Correction :**

On a $|0,1| < 1$ donc par propriété $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.

**(II)** **(2 points)** Un fabricant de produit pharmaceutiques et censé produire un médicament ayant 2.4 mg de principe actif. Une étude sur le long terme a montré que la loi de la variable aléatoire grand $X$ égal à la masse du principe actif est la suivante.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ en mg | 2,398 | 2,399 | 2,4 | 2,401 | 2,402 |
| $p_i$ | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

1. Déterminer l'espérance et la variance de la masse de principe actif. On veut les valeurs exactes.

**Correction :**

On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum p_i x_i \\ &= 0,3 \times 2,398 + 0,1 \times 2,399 + 0,1 \times 2,4 + 0,3 \times 2,401 + 0,2 \ \times 2,402 \\ &= 2.4\,\text{mg} \end{aligned}$$

En rajoutant une ligne avec les quantités $(x_i - 2,4)^2$ on peut calculer $V(X)$ :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum p_i (x_i - 2,4)^2 \\ &= 0,3 \times 0,002^2 + 0,1 \times 0,001^2 + 0,1 \times 0 + 0,3 \times 0,001^2 + 0,2 \ \times 0,002^2 \\ &= 0,000242 \end{aligned}$$

## (III) (11 points)

Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.
La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.
Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.
*Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à* $10^{-3}$.

**Partie A :**

La variable aléatoire $X$ désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   **Correction :**

   On assimile le prélèvement à un tirage avec remise. C'est donc une répétition de manière indépendante d'une expérience de Bernoulli dont l'issue succès est la boite n'est pas conforme. La variable $X$ qui compte le nombre de succès est donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,04$. On a $X \sim \mathcal{B}(200; 0,04)$.

2. Déterminer la probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes.

   **Correction :**

   Par propriété :
   $$P(X = 4) = \binom{200}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{196} \approx 0,057$$

3. Déterminer la variance et l'espérance de $X$. Que signifie l'espérance de $X$ dans le contexte de l'exercice ?

   **Correction :**

   Par propriété : $E(X) = np = 200 \times 0,04 = 8$ boîtes.
   Et $V(X) = np(1 - p) = 7,68$.
   L'espérance représente le nombre moyen de boîtes non conformes dans un lot de 200.

4. La directrice souhaite attribuer la mention lot de qualité à 90% des meilleurs lots. À partir de quel nombre maximum de boîtes défectueuses doit-elle attribuer la mention meilleur lot ?

   **Correction :**

   Plus de 90% de bons lots, veut dire moins de 10% de lots avec des défauts.
   On cherche donc la valeur du plus grand $k$ pour lequel $P(X \leq k) \leq 0,1$.
   D'après la calculatrice : $P(X \leq 5) \simeq 0,186$ et $P(X \leq 4) \simeq 0,095$.

   On déduit donc qu'il faut fixer la barre à 4 boîtes défectueuses pour avoir 90% de mentions meilleurs lots.

**Partie B :**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère $n$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et ayant la même loi de probabilité de que $X$.

On définit $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance de $M_n$.

**Correction :**

Par propriété :

$$E(M_n) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X) = 8.$$

2. Montrer que $V(M_n) = \dfrac{7,68}{n}$.

**Correction :**

Par propriété :

$$V(M_n) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}n \times 7,68 = \frac{7,68}{n}.$$

3. Montrer que

$$P(|M_n - 8| < 2,5) > 1 - \frac{1,2288}{n}$$

**Correction :**

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq 2,5) \leq \frac{V(M_n)}{2,5^2}$$

Dans le contexte cela nous donne :

$$P(|M_n - 8)| \geq 2,5) \leq \frac{1,2288}{n}$$

Alors par passage à l'événement contraire, on a :

$$P(|M_n - 8| < 2,5) > 1 - \frac{1,2288}{n}$$

**Partie C :**

L'entreprise de légume veut faire un contrôle qualité. Pour cela, elle vérifie sur $n = 80$ lots de 200 boîtes et elle obtient 900 boîtes non conforme.

1. Que représente $M_n$ dans le contexte de l'exercice ?

**Correction :**

$M_n$ représente la moyenne du nombre de boîtes non conformes par lot de 200, sur les $n$ lots contrôlés.

2. En vous aidant des résultats précédents, justifier l'affirmation ci-dessous. « La probabilité que la moyenne des boîtes défectueuses de 80 lots pris au hasard soit strictement comprise entre 5,5 et 10,5 est d'au moins 98 % ».

**Correction :**

En prenant $n = 80$ dans le résultat précédent :

$$P(|M_{80} - 8| < 2,5) \geq 1 - \frac{1,2288}{80} \approx 0,985$$

Donc, la probabilité que la moyenne soit entre $5,5$ et $10,5$ est d'au moins $98\%$.

3. Doit-on se poser des questions à propos de la qualité de fabrication ?

**Correction :**

L'entreprise a vérifié par elle même : sur 80 lots, 900 boîtes non conformes, donc on a $M_{80} = \frac{900}{80} = 11,25$ (moyenne observée). Ceci montre que nous ne sommes pas entre $5,5$ et $10,5$ et ceci arrive dans moins de $2\%$ des cas. Il vaut donc mieux douter de la qualité de la fabrication.