DS N° 12 : Probabilités (1h)

(I) (7 points)
Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

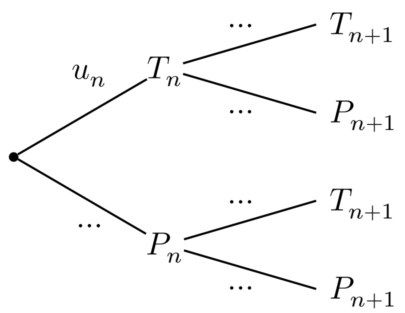
— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p\left(T_1\right)$, $p\left(P_1\right)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}\left(T_2\right)$, $p_{P_1}\left(T_2\right)$.
   (b) Montrer que $p\left(T_2\right) = \frac{1}{4}$.
   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser raison premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

(II) (2 points) Un fabricant de produit pharmaceutiques et censé produire un médicament ayant 2.4 mg de principe actif. Une étude sur le long terme a montré que la loi de la variable aléatoire grand X égal à la masse du principe actif est la suivante.

x_i en mg	2,398	2,399	2,4	2,401	2,402
p_i	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

1. Déterminer l'espérance et la variance de la masse de principe actif. On veut les valeurs exactes.

III (11 points)

Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.
La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.
Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.
Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3}.

Partie A :

La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes.
3. Déterminer la variance et l'espérance de X. Que signifie l'espérance de X dans le contexte de l'exercice ?
4. La directrice souhaite attribuer la mention lot de qualité à 90% des meilleurs lots. À partir de quel nombre maximum de boîtes défectueuses doit-elle attribuer la mention meilleur lot ?

Partie B :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et ayant la même loi de probabilité de que X.
On définit $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance de M_n.
2. Montrer que $V(M_n) = \dfrac{7,68}{n}$.
3. Montrer que

$$P(|M_n - 8| < 2,5) > 1 - \frac{1,2288}{n}$$

Partie C :

L'entreprise de légume veut faire un contrôle qualité. Pour cela, elle vérifie sur $n = 80$ lots de 200 boîtes et elle obtient 900 boîtes non conforme.

1. Que représente M_n dans le contexte de l'exercice ?
2. En vous aidant des résultats précédents, justifier l'affirmation ci-dessous. « La probabilité que la moyenne des boîtes défectueuses de 80 lots pris au hasard soit strictement comprise entre 5,5 et 10,5 est d'au moins 98 % ».
3. Doit-on se poser des questions à propos de la qualité de fabrication ?