

DS N° 1 Bis : Reprise fonctions (20 min)

① Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{3x} - \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (e^{3x} - 1)(3x + 4)$$

Dresser le tableau de signe de g .

Correction :

$x \mapsto 3x + 4$ est une fonction affine qui s'annule en $-\frac{4}{3}$.

Etude du signe de $e^{3x} - 1$:

On a :

$$\begin{aligned} e^{3x} - 1 > 0 &\iff e^{3x} > 1 \\ &\iff e^{3x} > e^0 \\ &\iff 3x > 0 \quad (\text{car exp est croissante}) \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$
$e^{3x} - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3(x+1)e^{3x} + e^{3x} - 3x - 4 \\
 &= e^{3x}(3x+4) - 3x - 4 \\
 &= (e^{3x} - 1)(3x+4) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

3. En déduire le tableau de variations de f .

Correction :

Comme on a le signe de f' , on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\frac{8 - e^{-4}}{3}$		1		$+\infty$

Où $f(0) = 1$ et $f(-\frac{4}{3}) = -\frac{1}{3}e^{-4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8 - e^{-4}}{3}$.

4. Soit $a \in [-\frac{1}{2}; 0]$, comparer en justifiant $f(a)$ et $f(2a)$.

Correction :

Pour $a \in [-\frac{1}{2}; 0]$, on a : $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ et donc $-1 \leq 2a \leq 0$ et finalement on a : $-1 \leq 2a \leq a \leq 0$ et comme f est décroissante sur $[0; 1]$, on en déduit $f(2a) \geq f(a)$.

DS N° 1 Bis : Reprise fonctions (20 min)

I Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - 2x)e^{-x} - x^2 + 4x$.

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (e^{-x} - 1)(2x - 4)$$

Dresser le tableau de signe de g .

Correction :

$x \mapsto 2x - 4$ est une fonction affine qui s'annule en 2.

Etude du signe de $e^{-x} - 1$:

On a :

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 > 0 &\iff e^{-x} > 1 \\ &\iff e^{-x} > e^0 \\ &\iff -x > 0 \quad (\text{car exp est croissante}) \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	0	$+\infty$
$e^{-x} - 1$	+	0	+	-
$2x - 4$	-	0	+	+
$g(x)$	-	0	+	-

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(2 - 2x)e^{-x} - 2e^{-x} - 2x + 4 \\ &= e^{-x}(2x - 4) - (2x - 4) \\ &= (e^{-x} - 1)(2x - 4) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

3. En déduire le tableau de variations de f .

Correction :

Comme on a le signe de f' , on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2	$4 - 2e^{-2}$		$-\infty$

Où $f(0) = 2$ et $f(2) = -2e^{-2} - 4 + 8 = 4 - 2e^{-2}$.

4. Soit $a \in [2; +\infty[$, comparer en justifiant $f(a)$ et $f(2a)$.

Correction :

Pour $a \in [2; +\infty[$, on a alors $2 \leq a \leq 2a$ et f est décroissante sur $[2; +\infty[$, donc $f(a) \geq f(2a)$.