DS N° 2 : Suites (1h15)

I (9 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

Correction :

On a :

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12{,}5 + 10 = 22{,}5$$

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Correction :

On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 10 - 20 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 10 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 20) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ avec $v_0 = u_0 - 20 = 10$.

3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

Correction :

Par propriété, on déduit pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Correction :

Nous avons $v_n = u_n - 20$, donc $u_n = v_n + 20$ et donc :

$$u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction :

On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc par propriété $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 20$.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Calculer que w_1.

Correction :

On a $w_1 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}u_0 + 7 = \frac{1}{2}45 + \frac{1}{2}30 + 7 = 44,5$

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```python
def suite(n):
    u=30
    w=45
    n=0
    while n<30 :
        u=u/2+10
        w=w/2+u/2+7
        n=n+1
    return w
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

Correction :

L'erreur est que il change la valeur de u et calcule u_1 avant d'avoir calculer w_1. Dans l'état, il calcule d'avord u qui donne 25 puis la valeur $w = \frac{45}{2} + \frac{25}{2} + 7 = 77$ et ce n'est pas la bonne valeur.

Il faut inverser les lignes 6 et 7 pour calculer w avant de changer la valeur de u. Le calcul pour `suite(1)` donne alors $w = \dfrac{45}{2} + \dfrac{30}{2} + 7 = 44,5$ qui est bien la bonne valeur.

3. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

Initialisation : $w_0 = 45$ et la formule donne pour $n = 0$: $11 + 34 = 45$. Donc l'initialisation est faite.

Hérédité : Pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $w_k = 10k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 34$ et montrons la propriété au rang suivant :

On a :

$$\begin{aligned}
w_{k+1} &= \frac{1}{2}w_k + \frac{1}{2}u_k + 7 \\
&= \frac{1}{2}(10k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 11\left(\frac{1}{2}\right)^k + 34) + \frac{1}{2}(20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^k) + 7 \\
&= 10k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 17 + 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 7 \\
&= 10(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 34
\end{aligned}$$

où dans cette dernière égalité on a factorisé par $10\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Cette dernière égalité est le résultat au rang $k+1$ et donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 34$

(b) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Correction :

On a : $0 \leqslant 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{n}$.

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10}{n} = 0$, donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

De plus nous savons déjà que $\lim_{n \to +\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$,

on déduit par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = 34$$

.

(II) (3 points) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+2} = \frac{u_n}{3} - \frac{u_{n+1}}{6}$$

1. Calculer u_2.

Correction :

Pour $n = 0$:

$$u_2 = \frac{u_0}{3} - \frac{u_1}{6} = \frac{0}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{7}{6}$$

2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = 3u_{n+1} + 2u_n$.

   (a) Démontrer que la suite (s_n) est géométrique.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= 3u_{n+2} + 2u_{n+1} \\
&= 3\left(\frac{u_n}{3} - \frac{u_{n+1}}{6}\right) + 2u_{n+1} \\
&= u_n - \frac{u_{n+1}}{2} + 2u_{n+1} \\
&= u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} \\
&= \frac{1}{2}3u_{n+1} + 2u_n \\
&= \frac{1}{2}s_n
\end{aligned}$$

Donc (s_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ avec $s_0 = 3u_1 + 2u_0 = 3.7 + 2.0 = 21$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de s_n en fonction de n.

Correction :

Par propriété : $s_n = s_0 q^n = 21\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2u_{n+1}$
   On admettra les deux questions suivantes sans aucune démonstration
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = -14\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
4. $\star$ **Hors Barême :** Déduire des questions 2.b. et 3.b. que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(\frac{-2}{3}\right)^n$$

Correction :

On a le système
$$\begin{cases} 3u_{n+1} + 2u_n = s_n & (L_1) \\ -2u_{n+1} + u_n = v_n & (L_2) \end{cases}$$
Ainsi, $2L_1 + 3L_2$ donne :
$$7u_n = 2s_n + 3v_n$$
Donc :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{7}(2s_n + 3v_n) \\ &= \frac{1}{7}(42\left(\frac{1}{2}\right)^n - 42\left(-\frac{2}{3}\right)^n) \\ &= 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(\frac{-2}{3}\right)^n \end{aligned}$$
Ainsi l'égalité cherchée est démontrée.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$
1. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

Correction :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{1+u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} \\ &= \frac{-u_n^2}{1+u_n} \end{aligned}$$

Et $u_n \geq 0$, donc $1 + u_n > 0$. De plus $u_n^2 \geq 0$, donc par produit et règle des signes : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Correction :

Nous venons de voir que (u_n) est décroissante.Elle est de plus minorée par 0. Donc par propriété, elle converge vers $\ell \geq 0$.