

DS N° 2 : Suites (1h15)

I (9 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Calculer que w_1 .

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```

1 def suite(n):
2     u=30
3     w=45
4     n=0
5     while n<30 :
6         u=u/2+10
7         w=w/2+u/2+7
8         n=n+1
9     return w

```

2. L'exécution de `suite(1)` ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur du terme w_n ?
3. (a) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

- (b) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

II (3 points) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+2} = \frac{u_n}{3} - \frac{u_{n+1}}{6}$$

1. Calculer u_2 .
2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = 3u_{n+1} + 2u_n$.
 - (a) Démontrer que la suite (s_n) est géométrique.
 - (b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de s_n en fonction de n .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 2u_{n+1}$

On admettra les deux questions suivantes sans aucune démonstration

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -14 \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

4. ★ **Hors Barème** : Dédurre des questions 2.b. et 3.b. que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 \left(\frac{-2}{3}\right)^n$$

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
2. En déduire que la suite (u_n) converge.