DS N° 4 : Mini test sur les limites (15 min)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = xe^{5x}$; en $-\infty$

$f_2(x) = \exp\left(\dfrac{3}{x^2}\right)$; en 0

Correction :

1. On a :
$$f(x) = \frac{1}{5}5xe^{5x}.$$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.
donc par composée (avec $X = 5x$), $\lim\limits_{x\to-\infty} 5xe^{5x} = 0$ et donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. On a :
$$f_2(x) = \exp\left(\frac{3}{x^2}\right).$$
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3}{x^2} = +\infty$.
$\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$
Par composée avec ($X = \dfrac{3}{x^2}$) on a $\lim\limits_{x\to0} f_2(x) = +\infty$.

II Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{2x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$0 \leq f(x) \leq \frac{2x}{e^{2x}}.$$

Correction :

Pour $x \geq 0$,
$1+e^{2x} \geq 0$ donc par quotient $f(x) \geq 0$.
De plus, $1+e^{2x} \geq e^{2x}$ donc par inverse :
$$\frac{1}{1+e^{2x}} \leq \frac{1}{e^{2x}}$$
et par produit par $x \geq 0$ on a :
$$f(x) \leq \frac{x}{e^{2x}}$$
De plus, pour $x > 0$, on a $x < 2x$, donc $\dfrac{x}{e^{2x}} \leq \dfrac{2x}{e^{2x}}$.
Ainsi on a bien

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2x}{e^{2x}}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Correction :

Par inverse de la croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. alors par composée (avec $X = 2x$) on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$.
Alors théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

III✶ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Etudiez la limite de (u_n).

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

Correction :

On a :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n}.$$

On écrit :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}.$$

Pour $k \leq n$, $\frac{k}{n} \leq 1$, donc :

$$u_n \leq \frac{1}{n} \times 1 \times \cdots \times 1.$$

Donc on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

On a donc par théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

DS N° 4 : Mini test sur les limites (15 min)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2}$; en $-\infty$

$f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^3}$; en $+\infty$

Correction :

1. On a :
$$f_1(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2}.$$
On a $x^3 + x^2 = x^3(1 + \frac{1}{x})$ donc par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + x^2 = -\infty$.
De plus $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
Alors par composée (avec $X = x^3 + x^2$) on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x^3+x^2} = 0$.
2. On a :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^3} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^6}$$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
et de plus par croissance comparée $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X^6} = +\infty$.
Alors par composée (avec $X = \sqrt{x}$), on $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

II Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x(\sin x + 2)}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{e}^x}{3x} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

Correction :

On sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc :
$$1 \leq \sin x + 2 \leq 3.$$
et donc par produit par $x > 0$ on a
$$x \leq x(\sin x + 2) \leq 3x.$$
et par inverse
$$\frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x(\sin x + 2)} \leq \frac{1}{x}.$$
En multipliant par $\mathrm{e}^x > 0$ on a le résultat cherché :
$$\frac{\mathrm{e}^x}{3x} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction :

On sait que par croissance comparée :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
et donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x} = +\infty$.
On déduit par théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x}$.

Correction :

En reprenant l'encadrement précédent et en le divisant par $e^x > 0$ on a :

$$\frac{1}{3x} \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{1}{x}.$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0.$$

III✳ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Etudiez la limite de (u_n).
On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

Correction :

On a :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n}.$$

On écrit :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}.$$

Pour $k \leq n$, $\frac{k}{n} \leq 1$, donc :

$$u_n \leq \frac{1}{n} \times 1 \times \cdots \times 1.$$

Donc on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

On a donc par théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$