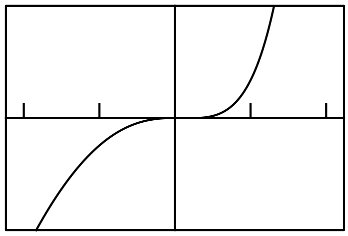
DS N°6 : Continuité (1h45)

Ⓘ (17 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$



Le graphique ci-contre est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.
A l'observation de cette courbe, on conjecture que f est croissante sur $[-3;2]$.
Le but de cet exercice est de vérifier ou d'infirmer cette conjecture.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On introduit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1.$$

1. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
2. Calculer la dérivée g' de g et montrer que pour $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$$
3. En déduire le tableau de variations de g. **Limite en $+\infty$:**
$$\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-1} = +\infty$$
Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Limite en $-\infty$:
En développant, on a pour $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}{-1} + 2\mathrm{e}^{x-1} - 1$$
Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-1} = 0$.

Alors par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α et donner un encadrement à 10^{-2} de α.

Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on souhaite écrire un script en Python qui renvoie un encadrement de α avec une précision de 10^{-p}. Compléter le script suivant.

```
def g(x):
   return (x+2)*exp(x-1)-1

def script(p):
  h=10**(-p)
  a=0

  while ........... :
   a=a+h
  print(a,a+h)
```

Partie B : Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et montrer en particulier que $f'(x) = xg(x)$.
2. En déduire le sens de variations de la fonction f.
3. Que pensez-vous de la conjoncture ?

Partie C : Encadrement de $f(\alpha)$

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.
   (a) Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0;1]$, puis donner le tableau de variation de h sur $[0;1]$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

II **(3 points)** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$
2. Etudier la convexité de la fonction f.
3. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

III✳ On considère f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^2(x) + f(x) = 6$$

Montrer que f est une fonction constante.