DS N° 7 : Convexité et ln (2h)

(I) (3 points)

1. Déterminer la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,01$$

2. Déterminer la primitive sur l'intervalle I indiqué.

$$f(x) = \frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^4} \text{ ; sur } I =]0;+\infty[.$$

Correction :

1. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,01 &\iff \ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) < \ln(0,01) \quad \text{(on applique ln qui est strictement croissante)}\\ &\iff n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(10^{-2})\\ &\iff n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \left(\text{On divise par } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0\right)\end{aligned}$$

Et $\dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 11,36$, donc la plus petite valeur entière est $n = 12$.

2. On a pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^4} = \frac{1}{4} \times 4(x^3+1)(x^4+4x+1)^{-4}$$

On reconnaît la forme $u'u^{-4}$, don une primitive de f sur I est :

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{(x^4+4x+1)^{-3}}{-3} + K = -\frac{1}{12}\frac{1}{(x^3+3x+1)^3} + K$$

où K est une constante réelle.

(II) (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln\left((u_n^2 - 2u_n + 2) - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2\ln(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme
$v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(3 - 1) = \ln 2$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln 2}$.

Correction :

Comme (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $\ln 2$: on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln 2$$

D'autre part $v_n = \ln(u_n - 1)$, donc $e^{v_n} = u_n - 1$ et ainsi :

$$u_n = 1 + e^{v_n}$$

il s'en suit

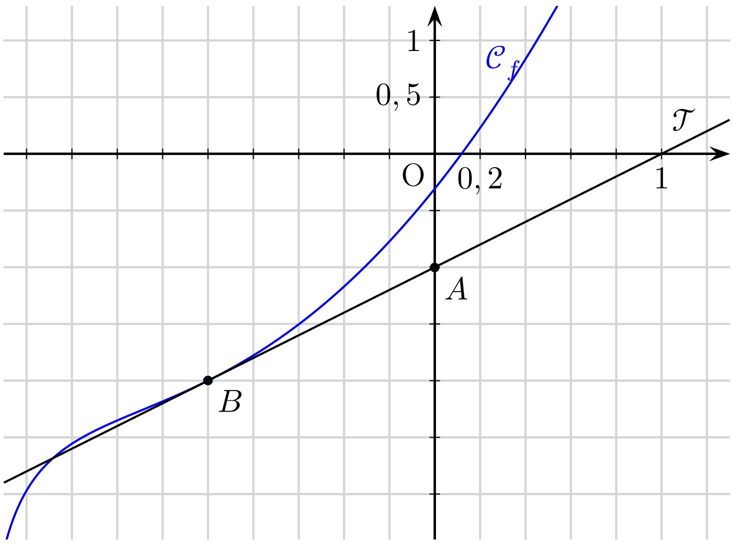
$$u_n = 1 + e^{2^n \times \ln 2}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction :

On a $u_n = 1 + e^{2^n \ln 2}$.
Comme $\ln 2 > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln 2 = +\infty$.
Par composition : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \ln 2} = +\infty$.
Finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

III **(12 points)** On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2; +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $\mathcal{T}$ au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point $A(0; -1)$.



Partie A : Exploitation du graphique
À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

Correction :

Graphiquement :
- $f(-1) = -2$.
- $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ passe par $A(0, -1)$ et $B(-1, -2)$.

$$f'(-1) = \frac{-1-(-2)}{0-(-1)} = 1$$

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

Correction :

Non, la fonction f n'est pas convexe sur tout son ensemble de définition.
En effet, on observe graphiquement que :
- Pour $x > -1$, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble située au-dessus de ses tangentes (convexe)
- Pour $x < -1,5$, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble située au-dessous de ses tangentes (concave)

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Correction :

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point pour $x \in [0; 0,2]$:
Donc on conjecture que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine qui a pour valeur approchée : $x \approx 0,1$.

Partie B : Étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Correction :

   Limite en -2^+ :
$$\lim_{x \to -2^+} (x^2 + 2x - 1) = -1$$
   D'autre part :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

   Donc $\lim\limits_{x \to -2^+} x + 2 = 0^+$
   et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$.
   Alors par composée avec $X = x + 2$, on a $\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$
   Finalement, par somme :
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty.$$
   On déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$.

   Correction :

   Pour $x > -2$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2+6x+5}{x+2} \end{aligned}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

   Correction :

   Pour $x > -2$, on a $x + 2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $N(x) = 2x^2 + 6x + 5$ qui est une expression de degré 2.
   Étude de $N(x)$:
$$\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$$
   Donc pour tout $x > -2$, $N(x) > 0$ (car $a = 2 > 0$).
   Ainsi : $f'(x) > 0$ pour tout $x > -2$.
   On déduit le tableau de variations :

x	-2^+ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
f	$\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

Correction :

- f est continue sur $]-2;+\infty[$ (comme somme de fonctions continues)
- f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ (car $f'(x) > 0$)
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-2;+\infty[$.
D'après la calculatrice : $\alpha \approx 0,12$.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2;+\infty[$.

Correction :

D'après le tableau de variations de f, on déduit le tableau de signes de f :

x	-2 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Correction :

Calculons $f''(x)$: On a pour $x > -2$:

$$f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x+6)(x+2)-(2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur $(x+2)^2 > 0$ pour $x > -2$, donc le signe de $f''(x)$ est celui de $N(x) = 2x^2+8x+7$ qui est une expression de degré 2.

$$\Delta = 64 - 56 = 8$$

On a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -2,707$$

$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,293$$

On a donc finalement le tableau suivant :
On a donc le tableau de convexité suivant :

x	-2		x_2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Convexité de f	‖	*concave*		*convexe*	

D'après le tableau de convexité, on a un changement de courbure en x_2, c'est donc l'abscisse de l'unique point d'inflexion : $x_2 = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ça correspond bien au graphique).

7. On note F une primitive de f sur $]-2;+\infty[$.
   Valider ou infirmer les affirmations suivantes en justifiant.
   Affirmation 1 : F est une fonction décroissante sur $]-2;0]$.
   Affirmation 2 : F est une fonction concave sur $]-2;+\infty[$.

Correction :

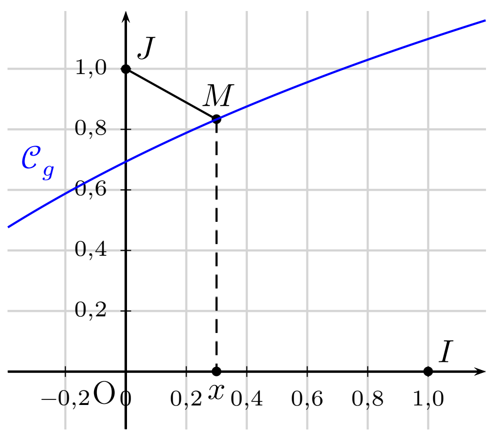
Affirmation 1 :
F est une primitive de f, donc pour $x > -2$: $F'(x) = f(x)$.
D'après le tableau de signe de f :
Sur $]-2;0[$, $f(x) < 0$ donc $F'(x) < 0$ et F décroissante.
L'affirmation est VRAIE.
Affirmation 2 :
$F''(x) = f'(x)$.
Or on a montré que $f'(x) > 0$ pour tout $x > -2$.
Donc $F''(x) > 0$ sur $]-2;+\infty[$, ce qui signifie que F est convexe sur cet intervalle.
L'affirmation est FAUSSE.

Partie C : Une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, représentée ci-contre.
Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

Correction :

Dans le repère orthonormé, on a : $J(0,1)$, et $M(x, g(x)) = (x, \ln(x+2))$.
Donc $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ \ln(x+2)-1 \end{pmatrix}$
Alors la distance JM est donnée par :

$$\begin{aligned} JM^2 &= x^2 + (\ln(x+2)-1)^2 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

(a) Montrer que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

Correction :

Calculons $h'(x)$:

On a pour $x > -2$ et en vertu de la formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x + 2[\ln(x+2) - 1] \times \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{2x(x+2) + 2[\ln(x+2) - 1]}{x+2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2\ln(x+2) - 2}{x+2} \\ &= \frac{2(x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2))}{x+2} \\ &= \frac{2f(x)}{x+2} \end{aligned}$$

(b) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Correction :

Pour $x > -2$, $x + 2 > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x)$.
On a a lors le tableau de variations suivant :

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	↘	$h(\alpha)$	↗	

(c) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

Correction :

JM minimale quand JM^2 minimale et donc quand h est minimale.
Or, h admet donc un minimum en $x = \alpha$ d¡après la question précédente. Ainsi la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α.

3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.

(a) Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

Correction :

Par définition, α vérifie $f(\alpha) = 0$.
c'est-à-dire $\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$
et en isolant $\ln(\alpha + 2)$, on a :

$$\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$$

(b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires. On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Correction :

Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α :

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$$

Et ainsi la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α a pour vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$
la droite (JM_α) a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(\alpha + 2) - 1 \end{pmatrix}$
Alors vérifions si ces vecteurs sont orthogonaux à l'aide du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\overrightarrow{JM} &= \alpha + \frac{1}{\alpha + 2}(\ln(\alpha + 2) - 1) \\
&= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + \ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha + 2} \\
&= \frac{f(\alpha)}{\alpha + 2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs sont orthogonaux et les droites sont perpendiculaires.
Méthode avec les coefficients directeurs
Coefficient directeur de la tangente :

$$m = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$$

Coefficient directeur de la droite (JM_α) :

$$\begin{aligned}
m_{JM_\alpha} &= \frac{y_m - y_J}{x_M - xJ} \\
&= \frac{g(\alpha) - 1}{\alpha - 0} \\
&= \frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha} \\
&= \frac{(1 - 2\alpha - \alpha^2) - 1}{\alpha} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} \\
&= -2 - \alpha \quad \text{(pour } \alpha \neq 0\text{, ce qui est le cas car } \alpha \approx 0,31\text{)}
\end{aligned}$$

Produit des coefficients directeurs :

$$\begin{aligned}
m \times m_{JM} &= \frac{1}{\alpha + 2} \times (-2 - \alpha) \\
&= \frac{-(2 + \alpha)}{\alpha + 2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Donc les deux droites sont perpendiculaires.