

DS N° 7 : Convexité et ln (2h)

I (3 points)

1. Déterminer la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,01$$

2. Déterminer la primitive sur l'intervalle I indiqué.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 1)^4} ; \text{ sur } I =]0; +\infty[.$$

II (3 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

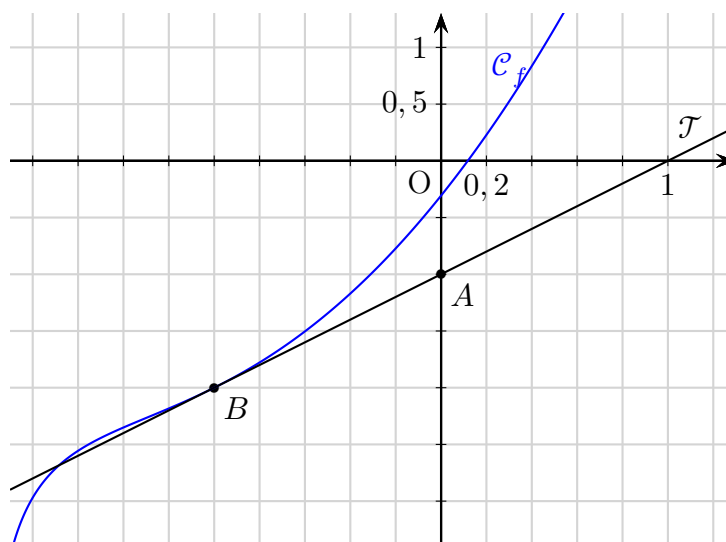
1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme.
 - (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln 2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

III (14 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] -2; +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $\mathcal{T}$ au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point $A(0; -1)$.



Partie A : Exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : Etude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $] -2; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2),$$

- Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 .
Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $] -2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2; +\infty[$.
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.
- On note F une primitive de f sur $] -2; +\infty[$.
Valider ou infirmer les affirmations suivantes en justifiant.
Affirmation 1 : F est une fonction décroissante sur $] -2; 0]$.
Affirmation 2 : F est une fonction concave sur $] -2; +\infty[$.

Partie C : Une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par

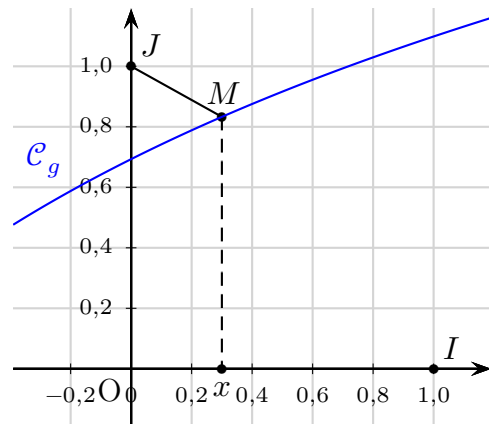
$$g(x) = \ln(x + 2).$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représentée ci-contre.

Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $] -2; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



- Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.
- On admet que la fonction h est dérivable sur $] -2; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
 - Montrer que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

- Dresser le tableau de variations de h sur $] -2; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
 - En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
- On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α .
 - Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
 - En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .