DS N° 7 : Convexité et ln (2h)

I **(3 points)**

1. Déterminer la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,001$$

2. Déterminer la primitive sur l'intervalle I indiqué.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4} \text{ ; sur } I =]0;+\infty[.$$

II **(3 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

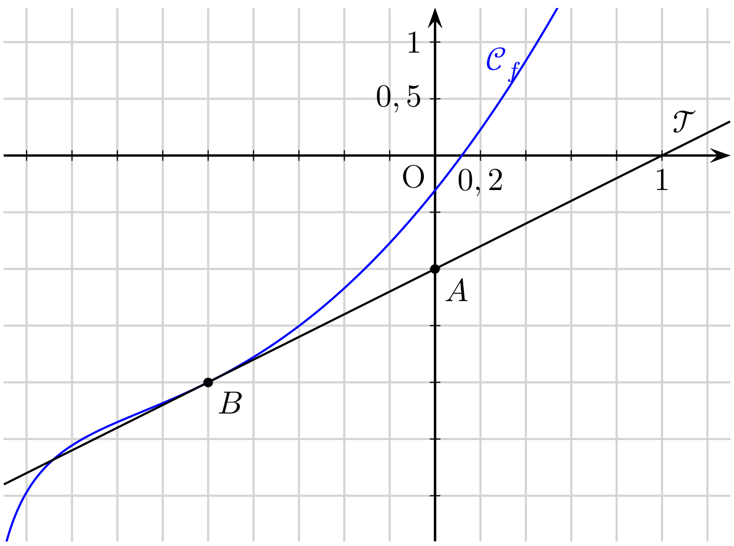
$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln 2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

III **(14 points)**

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $\mathcal{T}$ au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point $A(0;-1)$.



Partie A : Exploitation du graphique
À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : Etude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

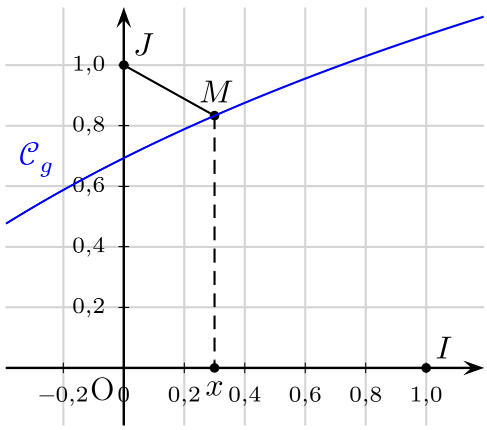
1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2;+\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.
7. On note F une primitive de f sur $]-2;+\infty[$.
   Valider ou infirmer les affirmations suivantes en justifiant.
   Affirmation 1 : F est une fonction croissante sur $]-2;+\infty[$.
   Affirmation 2 : F est une fonction convexe sur $]-2;+\infty[$.

Partie C : Une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, représentée ci- contre.
Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > -2$,
   $$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
   (b) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2;+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   (c) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.
   (a) Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   (b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.