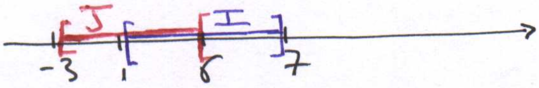
Devoir de mathématiques n°2

I



$I \cap J = [1\,;\,6[$

$I \cup J = [-3\,;\,7]$

II $\sqrt{x^2-1} = x^3$.

il faut $x^2-1 \geq 0 \iff (x-1)(x+1) \geq 0$

x		-1		$+1$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

d'où $D =]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$

III ① $4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

d'où $S = \left\{\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right\}$

② $(x-3)(x+2) + (x^2-6x+9) = 0$

$\iff (x-3)(x+2) + (x-3)^2 = 0$

$\iff (x-3)(x+2+x-3) = 0 \iff (x-3)(2x-1) = 0$ d'où $S = \left\{\frac{1}{2}\,;\,3\right\}$

③ $(x-1)^2 + 3 = 0 \iff (x-1)^2 = -3$ impossible car un carré ne peut être négatif

$S = \emptyset$

④ $\dfrac{4x+3}{4x-7} = 1 \iff 4x+3 = 4x-7$

$\iff 3 = -7$ impossible $S = \emptyset$

⑤ $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ (E_5)

domaine de résolution, il faut $x \neq 1$; $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

et $x^2-1 \neq 0$. $x^2-1 = 0 \iff (x+1)(x-1) = 0$

$\iff x = 1$ ou $x = -1$

Finalement, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,+1\}$.

$(E_5) \iff \dfrac{1(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x}{x^2-1}$

$\iff \dfrac{-x+3}{(x^2-1)} = \dfrac{2x}{x^2-1} \iff \dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 0 \iff x = 1 \notin D$

donc $S = \emptyset$

IV $1<a<5$
$-2<b<3$.

① $1<a<5$

$\iff 2<2a<10$ ($\times 2$ avec $2>0$). (I_1)

$-2<b<3$

$\iff +14>-7b>-21$ ($\times(-7)$ avec $-7<0$).

$\iff -21<-7b<+14$ (I_2)

par somme de (I_1) et (I_2) (car elles sont dans le même sens)

$-19<2a-7b<17$

② $-2<b<3$

$\Rightarrow +2>-b>-3$ ($\times(-1)$ avec $-1<0$)

$\Rightarrow 6>4-b>1$

$\Rightarrow 1<4-b<6$

d'autre part $1<a<5$

donc les deux dernières égalités ont même sens et tous les memb[res] sont positifs alors par produit $1<a(4-b)<30$

V ① $(2x-3)(1-3x)<0$; $2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2}$; $1-3x=0 \iff x=\frac{1}{3}$

x		$1/3$		$3/2$	
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$1-3x$	$+$	0	$-$		$-$
$(2x-3)(1-3x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $S=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

② $(x-5)^2 \geqslant (x-5)(1-5x)$

$\iff (x-5)^2-(x-5)(1-5x)\geqslant 0$

$\iff (x-5)\left(x-5-(1-5x)\right)\geqslant 0$

$\iff (x-5)(6x-6)\geqslant 0$

$\iff 6(x-5)(x-1)\geqslant 0$

$x-5=0 \iff x=5$

$x-1=0 \iff x=1$

Tableau de signes :

x		1		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-5)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S=]-\infty;1]\cup[5;+\infty[$

③ $x - 1 < \dfrac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow \quad x - 1 - \dfrac{1}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-1)^2 - 1}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-1-1)(x-1+1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)x}{x-1} < 0$

Tableau de signes:

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x		0		1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{(x-2)x}{x-1}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty ; 0[\cup]1$

VI $A(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2}$

①

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x		-1		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2}$	$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

② pour $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)(x+1)^2 = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$$
$$= x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1$$
$$= x^3 + x^2 - x - 1$$

donc l'égalité est démontrée

③ $\dfrac{x^3 + x^2 - 3}{x-2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{x-2} - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^3 + x^2 - 3 - (x-2)}{x-2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x-2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2} \leq 0$ (d'après ②)

$\Leftrightarrow \quad A(x) \leq 0$

Donc finalement

$S = [1 ; 2[\cup \{-1\}$.