

Devoir de mathématiques N°3;

- I) ① pour $x=0$ on a $y=5$
 pour $x=2$ on a $y=2+\sqrt{2}$
 pour $x=6$ on a $y=3$

② On a

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \in]5; +\infty[\\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \in]0; 5] \\ 5 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

II) ① $\frac{4x-7}{3x+2} \leq 4 \iff \frac{4x-7}{3x+2} - 4 \leq 0$

$$\iff \frac{4x-7-4(3x+2)}{3x+2} \leq 0 \iff \frac{-8x-15}{3x+2} \leq 0$$

On dresse alors le tableau de signes.

$-8x-15$ est un binôme qui s'annule en $-\frac{15}{8}$
 $3x+2$ ----- $-\frac{2}{3}$

x	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{2}{3}$
$-8x+15$	+ 0 -	-
$3x+2$	-	- 0 +
$\frac{-8x+15}{3x+2}$	- 0 +	-

donc $S =]-\infty; -\frac{15}{8}] \cup]-\frac{2}{3}; +\infty[$

② $\sqrt{x^2+1} < -1$ n'a pas de solutions car une racine est toujours positive.

③ $(x^2+2x+3)^2 \leq (2x+1)^2 \iff (x^2+2x-3)^2 - (2x+1)^2 \leq 0$

$$\iff (x^2+2x-3-(2x+1))(x^2+2x-3+(2x+1)) \leq 0 \quad (\text{différence de deux carrés})$$

$$\iff (x^2+2)(x^2+4x+4) \leq 0$$

$$\iff (x^2+2)(x+2)^2 \leq 0$$

$$\iff (x+2)^2 \leq 0 \quad \text{car pour tout } x, x^2+2 > 0.$$

et cette dernière égalité est impossible sauf pour $(x+2)^2 = 0$

$$\iff x = -2$$

④ $(x-1)(x+1) \leq x^2 \iff x^2-1 \leq x^2$

$$\iff -1 \leq 0 \quad \text{toujours vrai.}$$

donc $S = \{-2\}$

donc $S = \mathbb{R}$

III) ① a) $D = [-6; 3[\cup]3; +\infty[$

b) $f(2) = -2; f(6) = -1$

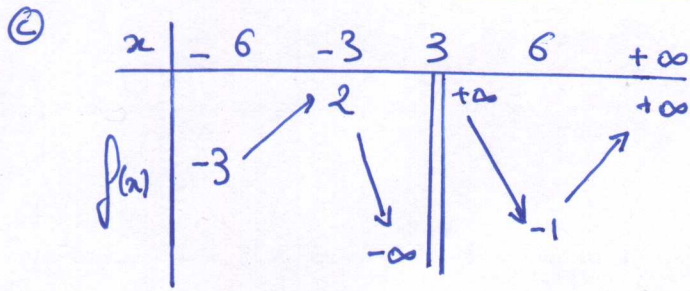
c) Les antécédents de -2 sont $-5,7$ et 2 à peu près.

② a) Les solutions de $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de la courbe \mathcal{C}_f situés sur la droite d'équation $y=2$.

On lit $S = \{-3, 3, 6, 8\}$

b) Les solutions de $f(x) \leq 1$ sont les abscisses des points de C situés en-de (ou sur) la droite d'équation $y=1$

on lit $S = [-6; -4] \cup [0; 3] \cup [4; 7.5]$



c) Sur \mathbb{R} , le minimum de f est 2 atteint en $x=-3$

IV) ① Les antécédents de 2,5 par f sont $-\frac{1}{2}$ et 4

② pour $m < -2$, $f(x)=m$ admet un seul antécédent
 pour $m \geq -2$, $f(x)=m$ admet deux antécédents

③ pour $x \neq 0$, $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x}$
 $= \frac{(x-1)x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$

d'autre part $(x-2)(x+1) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$ d'où

$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x}$ pour $x \neq 0$

④ $f(x) < 0 \iff \frac{(x-2)(x+1)}{x} < 0$ d'après ③

$x-2$ est un trinôme s'annulant en 2
 $x+1$ ----- annule en -1
 x ----- annule en 0

On a donc le tableau de signe suivant

Car f non définie pour $x=0$

x	-2	-1	0	2		
x	-	-	0	+	+	
$x-2$	-	-	-	0	+	
$x+1$	-	0	+	+	+	
$\frac{(x-2)(x+1)}{x}$	-	0	+	-	0	+

On a donc $S = [-2; -1] \cup [0; 2[$