17 novembre 2009

Devoir de mathématiques N°3 ;

I ① Pour $x=0$ on a $y=5$
pour $x=2$ on a $y=2+\sqrt{2}$
pour $x=6$ on a $y=3$

② On a

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\in]5;+\infty[\\ \sqrt{x}+2 & \text{si } x\in]0;5] \\ 5 & \text{si } x\in]-\infty;0] \end{cases}$$

II ① $\dfrac{4x-7}{3x+2}\leq 4 \iff \dfrac{4x-7}{3x+2}-4\leq 0$

$\iff \dfrac{4x-7-4(4x-7)}{3x+2}\leq 0 \iff \dfrac{-8x-15}{3x+2}\leq 0$

On dresse alors le tableau de signes.

$-8x-15$ est un binôme qui s'annule en $-\dfrac{15}{8}$

$3x+2$ ------------------------------ $-\dfrac{2}{3}$

x		$-15/8$		$-2/3$	
$-8x+15$	+	0	−		−
$3x+2$	−		−	0	+
$\dfrac{-8x+15}{3x+2}$	−	0	+	‖	−

donc $S=]-\infty;-\frac{15}{8}]\cup]-\frac{2}{3};+\infty[$

② $\sqrt{x^2+1}<-1$ n'a pas de solutions car une racine est toujours positive.

$S=\emptyset$

③ $(x^2+2x+3)^2\leq(2x+1)^2 \iff (x^2+2x-3)^2-(2x+1)^2\leq 0$

$\iff (x^2+2x-3-(2x+1))(x^2+2x-3+(2x+1))\leq 0$ (différence de deux carrés)

$\iff (x^2+2)(x^2+4x+4)\leq 0$

$\iff (x^2+2)(x+2)^2\leq 0$

$\iff (x+2)^2\leq 0$ car pour tout x, $x^2+2>0$.

et cette dernière égalité est impossible sauf pour $(x+2)^2=0$

$\iff x=-2$

d'où $S=\{-2\}$

④ $(x-1)(x+1)\leq x^2 \iff x^2-1\leq x^2$

$\iff -1\leq 0$ toujours vrai.

donc $S=\mathbb{R}$

III ① ⓐ $D=[-6;3[\cup]3;+\infty[$

ⓑ $f(2)=-2$; $f(6)=-1$

ⓒ Les antécédents de -2 sont $-5{,}7$ et 2 à peu près.

② ⓐ Les solutions de $f(x)=2$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite d'équation $y=2$.

On lit $S=\{-3;3{,}6;8\}$

ⓑ Les solutions de $f(x) \leq 1$ sont les abscisses des points de C situés en-de
(ou sur) la droite d'équation $y = 1$

On lit $S = [-6 ; -4] \cup [0 ; 3[\cup [4 ; 7{,}5]$

ⓒ

x	-6		-3		3		6		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ⓓ Sur $\mathbb{R}$, le minimum de f est 2 atteint en $x = -3$

IV

① Les antécédents de $2{,}5$ par f sont $-\frac{1}{2}$ et 4

② pour $m < -2$, $f(x) = m$ admet un seul antécédent
pour $m \geqslant -2$, $f(x) = m$ admet deux antécédents

③ pour $x \neq 0$, $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x}$

$$= \frac{(x-1)x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

d'autre part $(x-2)(x+1) = x^2 - 2x + x - 2$
$= x^2 - x - 2$ d'où $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x}$ pour x

④ $f(x) < 0 \iff \frac{(x-2)(x+1)}{x} < 0$ d'après ③

$x - 2$ est un binôme s'annulant en 2
$x + 1$ — — — — — — — — — en -1
x — — — — — — — — — — — 0

On a donc le tableau de signe suivant

Car f non définie pour x <

x	-2		-1		0		2	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

On a donc $S = [-2 ; -1[\cup]0 ; 2[$