Devoir de mathématiques N° 4 ($\frac{1}{2}$h ; 2^3)

18 déc 20

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

(A) Lecture graphique :

① on lit que les solutions de $f(x)=2$ sont $S = \{-0{,}7 ; 1 ; 2{,}7\}$

② $f(x) > 0$ pour $x \in S =]-1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

③ $f(0) = 4$

④ x antécédent de $0 \iff f(x) = 0 \iff x \in \{-1 ; 2\}$

⑤

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

(B) ① @ $k(x) = x + 1$ est une fonct° affine ; sa représentat° C_k est une droite

x	-1	2
$k(x)$	0	3

⑥ pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - k(x) = x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1)$$
$$= x^3 - 3x^2 - x + 3$$

d'autre part, $(x-3)(x^2-1) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ (en développant)

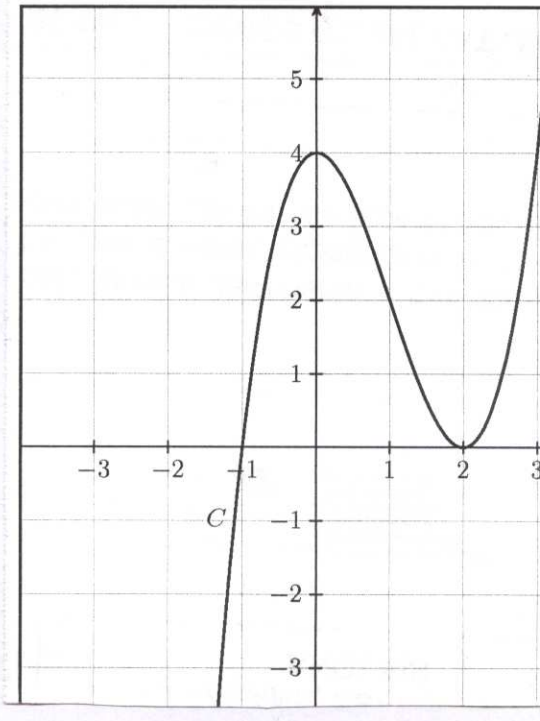
d'où l'égalité est vraie : $f(x) - k(x) = x^3 - 3x^2 - x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$

© $f(x) - k(x) = (x-3)(x^2-1)$
$= (x-3)(x+1)(x-1)$

$x-3$ binôme s'annulant en 3
$x+1$ ——————— -1
$x-1$ ——————— $+1$

on a alors le tableau de signes suivant

x	-1		1		3	
$x-3$	$-$		$-$		0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		0	$+$	$+$	
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0 $+$



⑦ Le signe de $f(x) - k(x)$ donne la posit° relative :

C_f au dessus de C_k lorsque $f(x) - k(x) \geq 0$ c'est-à-dire sur $[-1, 1] \cup [3, +\infty[$

② pour $x \in]-\infty, 3]$, $f(x) - 4 = x^3 - 3x^2$
$= x^2(x-3)$

On cherche le tableau de signe de $f(x) - 4$

x	$-\infty$		0		3	
x^2	$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-4$	$-$		$-$	0	$+$	

donc $f(x) - 4 \geq 0$

d'où $f(x) \leq 4$ sur $]-\infty, 3]$ de plus $f(0) = 4$ donc 4 maximum de f sur $]-\infty, 3]$ atteint