22/12/2009

Devoir N°5 - Vecteurs

I ① ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-x_D\\1-y_D\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}3-x_D = 2\\1-y_D = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D = 1\\y_D = 2\end{cases}$ d'où $D(1;2)$

② ⓐ I milieu de [AC] $\Rightarrow I\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

x ⓑ $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-3/2\\+3/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}+1/2\\+1/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

donc $IA^2 + IB^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(+\frac{1}{2}\right)^2$

$= 2 \times \frac{9}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$AB^2 = 4 + 1 = 5$

d'où $IA^2 + IB^2 = AB^2$ donc IAB rectangle en I

$\Rightarrow (IA) \perp (IB)$

ⓒ Les diagonales du parallélogramme se coupent en I et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ ABCD losange.

③ ⓐ $E(x,0)$; $x \in \mathbb{R}$, E décrit donc l'axe des abscisses

ⓑ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x\\-4\end{pmatrix}$.

A,B,E alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ colinéaires

$\Leftrightarrow XY' - X'Y = 0$

$\Leftrightarrow 2(-4) - (-1)x = 0 \Leftrightarrow -8 + x = 0 \Leftrightarrow x = 8$

d'où $E(8,0)$

④ ⓐ Soit $F(x;y)$; $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2 = -3/2\\y-3 = -3/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1/2\\y = 3/2\end{cases}$ d'où $F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ⓑ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-5/2\\1/2\end{pmatrix}$

$XY' - X'Y = 5 \times \frac{1}{2} - (-1)(-5/2)$
$= 0$

donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ colinéaires

donc E, C, F alignés.

II ① Soit $D(x;y)$

$\vec{AD}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + 4\vec{AC} \iff \begin{cases} x-1 = 4-8 \\ y-2 = -4-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow D(-3,-6)$

② $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$AB^2 = 8$; $AD^2 = 16 + 64 = 80$; $BD^2 = 72$

d'où $BD^2 + AB^2 = AD^2$ donc d'après la réciproque du th. de Pythagore

ABD rectangle en B.